University “Alexandru Ioan Cuza” of Iaşi
Faculty of Computer Science

TECHNICAL REPORT

Proprietăţi structurale ale reţelelor Petri

(Teză de doctorat)

Cristian Vidraşcu

TR 04-04, December 2004

ISSN 1224-9327

Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” Iaşi
Facultatea de Informatică
Str. Gen. Berthelot 16, 700483 Iaşi, România
Tel. +40-232-201090, email: bibl@infoiasi.ro

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII DIN ROMÂNIA
UNIVERSITATEA "AL. I. CUZA" IAŞI
FACULTATEA DE INFORMATICĂ

Cristian VIDRAŞCU

Proprietăţi structurale ale reţelelor Petri

TEZĂ DE DOCTORAT

Conducător ştiinţific
Prof. univ. dr. Toader JUCAN

Iaşi – 2004

Cristian VIDRAŞCU

Universitatea "Al. I. Cuza" Iaşi
Facultatea de Informatică
700483 – Iaşi, România
Email: `vidrascu@infoiasi.ro`

Referenţi ştiinţifici

Prof. Dr. Gheorghe Grigoraş, Preşedinte (Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi)
Prof. Dr. Toader Jucan, Conducător ştiinţific (Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi)
Prof. Dr. Cristian Masalagiu (Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi)
Prof. Dr. Adrian Atanasiu (Universitatea Bucureşti)
Prof. Dr. Octavian Păstrăvanu (Universitatea Tehnică "Gh. Asachi" Iaşi)

Universitatea "Al. I. Cuza" Iaşi
Facultatea de Informatică
TR04-04, ISSN 1224-9327

Notă asupra unui rezultat al lui A. Finkel

Unul din rezultatele lui A. Finkel din 1991 stabilea un arbore (şi un graf) de acoperire minimal pentru reţele Petri de tip P/T ([21, 22]). Acest rezultat a fost utilizat de-a lungul timpului de mulţi autori. În 2005 s-a arătat că acest rezultat este eronat (A. Finkel, G. Geeraerts, J.-F. Raskin and L. Van Begin: *A counter-example to the minimal coverability tree algorithm*, Technical report 535, Université Libre de Bruxelles, 2005), algoritmul propus de A. Finkel nereuşind să construiască un arbore minimal pentru orice reţea P/T. Mai mult, nu se ştie încă cum ar putea fi corectat acest rezultat.

Prezenta teză de doctorat, susţinută în decembrie 2004, face apel la arborele minimal de acoperire al lui A. Finkel. Ca urmare, un număr de rezultate sunt afectate. Acestea sunt:

- Teorema 3.1.2 şi corolarul 3.1.3, ce amintesc rezultatele lui A. Finkel referitoare la graful minimal de acoperire pentru reţele Petri de tip P/T;
- Teorema 3.1.6, ce exprimă rezultatul lui A. Finkel extins la cazul reţelelor P/T cu marcări iniţiale infinite;
- Teorema 3.2.5 şi corolarul 3.2.2. În cadrul acestora nu mai are loc partea referitoare la calculabilitatea grafului de acoperire minimal pentru reţele Petri cu salturi reduse-calculabile, deoarece se bazează pe calculabilitatea grafului minimal pentru reţele P/T (i.e. pe rezultatul lui A. Finkel, ce a fost infirmat în 2005);
- Teorema 3.4.2 şi algoritmul ce o însoţeşte, ce extinde rezultatul lui A. Finkel la cazul reţelelor Petri colorate cu mulţimi de culori finite, şi prin urmare nu mai are loc partea referitoare la calculabilitatea grafului minimal. Iar în cadrul algoritmului este folosită tehnica de construcţie a arborelui minimal a lui A. Finkel.

O altă serie de rezultate rămân adevărate, dar demonstraţiile lor sunt afectate, în sensul că în cadrul lor se poate înlocui graful de acoperire minimal cu graful de acoperire Karp-Miller pentru ca demonstraţiile să rămână corecte. Acestea sunt:

- Corolarul 3.1.4, ce extinde cîteva rezultate de decidabilitate de la reţelele P/T clasice la cazul reţelelor P/T cu marcări iniţiale infinite;
- Corolarul 3.2.3, ce stabileşte cîteva rezultate de decidabilitate pentru reţelele Petri cu salturi reduse-calculabile;
- Corolarul 3.3.1. În egalitatea din enunţul acestuia se va înlocui mulţimea de acoperire minimală cu mulţimea de acoperire Karp-Miller;
- Corolarul 3.4.3, ce stabileşte cîteva rezultate de decidabilitate pentru reţelele Petri colorate cu mulţimi de culori finite;
- Teorema 5.1.2, ce stabileşte calculabilitatea gradului superior de concurenţă pentru reţele P/T. În egalitatea din cadrul acesteia se va înlocui mulţimea de acoperire minimală cu mulţimea de acoperire Karp-Miller;
- Lema 5.2.1, din anexa E. În egalitatea ce intervine în demonstraţia acesteia, se va înlocui mulţimea de acoperire minimală cu mulţimea de acoperire Karp-Miller.

Restul rezultatelor acestei teze nu sunt afectate de construcţia lui A. Finkel.

Părinţilor mei

Prefaţă

Prezentare generală

Reţelele Petri sunt un model matematic utilizat pentru modelarea, analiza şi sinteza sistemelor distribuite. Istoria lor a început în 1962 cu lucrarea de doctorat a lui Carl Adam Petri.

La acea epocă, unul dintre modelele matematice folosite pentru modelarea sistemelor reale secvenţiale era acela al automatelor finite, sau altfel spus al sistemelor tranziţionale de tip stare-acţiune. Pornind de la aceste modele secvenţiale, C. A. Petri a avut ideea de modelare a sistemelor paralele şi distribuite prin divizarea stării sistemului în anumite elemente care să caracterizeze stările locale ale subsistemelor constituente, un element putând face parte din mai multe stări locale (exemplu: resurse partajabile – harddisk, imprimantă, etc.), şi prin caracterizarea evoluţiei sistemului printr-o execuţie concurentă a unor tranziţii locale.

Aceste modele de sisteme tranziţionale concurente au fost denumite ***reţele Petri***, după numele celui care a iniţiat această teorie matematică. Ea s-a dovedit a fi foarte adecvată pentru studierea sistemelor distribuite, în care accentul este pus pe fenomenele de comunicare, sincronizare, paralelism şi concurenţă a subsistemelor constituente.

Reţelele Petri au ajuns în centrul atenţiei cercetătorilor la scurt timp de la apariţia lor, datorită faptului că se bucură de o serie de atuuri fundamentale: simplitate, generalitate, adaptabilitate. În prezent reţelele Petri au aplicaţii numeroase şi sunt utilizate în diverse domenii de activitate, principalul motiv al succesului lor fiind faptul că au o *reprezentare grafică* intuitivă şi o *semantică bine-definită*, ce permite o *analiză formală* a comportamentului şi proprietăţilor acestora.

Deoarece scopul modelelor matematice este studierea evoluţiei şi a proprietăţilor sistemului modelat, iar aceste proprietăţi sunt modelate prin anumite obiecte matematice sau proprietăţi ale modelului matematic, este necesară găsirea unor metode de calcul (algoritmi de decizie) a acestor proprietăţi.

Un asemenea obiect matematic sunt structurile de acoperire pentru reţele Petri, cu ajutorul cărora se pot soluţiona cîteva probleme de decizie (şi anume: problema acoperirii, problema mărginirii, problema pseudo-viabilităţii, problema finititudinii mulţimii de accesibilitate, problema finititudinii arborelui de accesibilitate şi problema regularităţii) şi se poate măsura gradul de concurenţă al reţelei.

Un alt obiect matematic util s-a dovedit a fi calculul cu invarianţi; S-invarianţii şi T-invarianţii sunt nişte tehnici de algebră liniară utilizate în studiul reţelelor Petri pentru verificarea proprietăţilor lor.

De asemenea, un alt aspect ce s-a dovedit a fi util de studiat a fost problema concurenţei pentru reţele Petri şi a măsurării ei. O asemenea măsură o constituie *gradele de concurenţă*, ce au o importanţă practică în activitatea de modelare şi analiză a sistemelor reale prin reţele Petri.

Structura lucrării

Am structurat lucrarea în următoarele capitole:

- Prefaţă
- Cap. 1 Reţele Petri. Noţiuni introductive
- Cap. 2 Metode de analiză formală a reţelelor Petri
- Cap. 3 Structuri de acoperire şi probleme decidabile
- Cap. 4 Tehnica invarianţilor şi verificarea proprietăţilor
- Cap. 5 Grade de concurenţă

- Cap. 6 Concluzii şi perspective
- Anexe
- Bibliografie

Voi detalia în continuare structura generală a tezei:

În capitolul 1 am prezentat noţiunile de bază, notaţiile şi terminologia referitoare la reţele Petri, necesare cititorului pentru înţelegerea acestei lucrări. Capitolul debutează cu un prim subcapitol ce conţine o prezentare de ansamblu a reţelelor Petri clasice, i.e. reţele P/T (locaţie/tranziţie), însoţită de o descriere a proprietăţilor structurale şi dinamice ale acestora, şi a problemelor de decizie asociate. De asemenea, sunt amintite principalele extensii ale reţelelor Petri clasice. Al doilea subcapitol prezintă o anumită extensie, introdusă de colectivul de cercetare de la Iaşi, şi anume reţelele Petri cu salturi, cărora le este dedicată partea cea mai importantă a contribuţiilor aduse de această lucrare. Iar în ultimul subcapitol sunt tratate reţelele Petri de nivel înalt, şi în special cele colorate.

Şi capitolul 2 are rol introductiv, el conţinînd o prezentare succintă a metodelor de analiză formală pentru reţele Petri, existente în prezent, precum ar fi: grafuri de apariţie (bazate pe marcări simetrice, mulţimi de atracţie, marcări de acoperire, sau marcări simbolice), invarianţi locaţie şi tranziţie, reguli de reducere, analiza de performanţă, ş.a. Următoarele capitole vor detalia cîteva dintre acestea, mai exact pe acelea la care se referă contribuţiile aduse de această lucrare, şi anume: structuri de acoperire, invarianţi şi grade de concurenţă.

Capitolul 3 detaliază cercetările referitoare la *structurile de accesibilitate şi de acoperire*, precum şi la aplicaţiile acestora în rezolvarea unor *probleme de decizie* referitoare la proprietăţile reţelelor Petri. Şi anume, acest capitol este divizat în trei mari părţi, dedicate celor trei categorii de reţele Petri considerate în această lucrare:

- Prima parte a capitolului este dedicată reţelelor Petri clasice, fiind prezentate rezultatele existente anterior, referitoare la structurile de accesibilitate şi de acoperire pentru reţele P/T.

  Mai întîi, am făcut o trecere în revistă a structurilor de accesibilitate şi a structurilor de acoperire de tip Karp–Miller pentru reţele P/T, urmată apoi de o prezentare a structurilor de acoperire minimale, ce au fost introduse de A. Finkel, evidenţiind importanţa practică deosebită a acestora din urmă pentru rezolvarea eficientă a unor probleme de decizie.

  În continuarea acestui subcapitol, se tratează problemele de decizie pentru reţele P/T care sunt rezolvabile pe baza structurilor de acoperire (atît a celor de tip Karp–Miller, cît şi a celor minimale).

  Ultima parte a acestui subcapitol cuprinde o serie de rezultate *originale* ale autorului, referitoare la cazul reţelelor P/T ce au marcări iniţiale infinite (i.e., cu ω-componente), pentru care a extins definiţiile structurilor de acoperire şi a rezultatelor legate de acestea de la cazul reţelelor P/T obişnuite (i.e. cu marcări iniţiale finite). Această extensie a fost necesară pentru partea a doua a acestui capitol, dedicată reţelelor Petri cu salturi.

- Partea a doua a acestui capitol cuprinde rezultate *originale* ale autorului.

  Mai întîi, am definit structuri de j-accesibilitate pentru reţelele Petri cu salturi. Apoi am prezentat rezultatele anterioare referitoare la arborele de acoperire de tip Karp–Miller pentru subclasa reţelelor cu salturi finite.

În partea a treia a acestui subcapitol am definit o nouă subclasă de reţele cu salturi, numite reţele cu salturi reduse-calculabile (*mRCJPTN*), şi am arătat cum se pot defini structuri de acoperire pentru clasa reţelelor *mRCJPTN*, inclusiv structuri de acoperire minimale (ceea ce reprezintă o noutate şi pentru subclasa reţelelor cu salturi finite).

Acest subcapitol se încheie cu o prezentare a problemelor de decizie ce sunt decidabile pentru clasa reţelelor *mRCJPTN* pe baza acestor structuri de acoperire minimale.

- Un alt rezultat *original* se referă la o aplicaţie a structurilor de acoperire pentru calculul gradelor de concurenţă a unei reţele P/T sau cu salturi.

- În ultima parte a acestui capitol, am prezentat o sinteză asupra rezultatelor anterioare referitoare la structurile de accesibilitate complete şi reduse, precum şi a aplicaţiilor acestora, pentru reţele Petri colorate.

  Iar apoi, am extins unele noţiuni şi rezultate de decidabilitate de la reţele clasice P/T la clasa reţelelor colorate cu mulţimi de culori finite. Şi anume, am arătat cum se definesc *structurile de acoperire* (atît cele de tip Karp–Miller, cît şi cele minimale) pentru această clasă de reţele colorate şi ce proprietăţi sunt decidabile pe baza acestora.

  În încheierea acestui subcapitol, am prezentat tehnica de combinare a metodei lui K. Jensen a grafurilor de accesibilitate reduse cu simetrii, cu metoda lui A. Finkel a grafului de acoperire minimal.

Capitolul 4 detaliază cercetările referitoare la *tehnica invarianţilor*, precum şi la aplicaţiile acestora la *verificarea* proprietăţilor reţelelor Petri. Şi acest capitol este divizat în trei mari părţi, dedicate celor trei categorii de reţele Petri considerate în această lucrare:

- Prima parte a capitolului este dedicată reţelelor Petri clasice, fiind prezentate rezultatele existente anterior, referitoare la tehnica invarianţilor pentru reţele P/T.

  Mai întîi, am făcut o trecere în revistă a tehnicilor de algebră liniară, bazate pe S- şi T-invarianţi, utilizate în studiul proprietăţilor reţelelor P/T.

  Ea este urmată de o prezentare a două exemple semnificative de sisteme reale modelate prin reţele P/T şi analizate utilizând tehnica invarianţilor.

- Partea a doua a acestui capitol cuprinde rezultate *originale* ale autorului.

  Mai precis, am definit S-invarianţi şi T-invarianţi pentru clasa reţelelor Petri cu salturi Δ-finite, şi am extins unele noţiuni şi rezultate legate de aceşti invarianţi de la clasa reţelelor P/T, la clasa reţelelor Petri cu salturi Δ-finite.

- Iar în următorul subcapitol, am prezentat două exemple semnificative de sisteme reale modelate prin reţele Petri cu salturi şi analizate utilizând tehnica invarianţilor.

- Ultima parte a acestui capitol prezintă doar o listă de referinţe bibliografice despre reţele Petri de nivel înalt şi tehnicile de algebră liniară utilizate în studiul proprietăţilor acestora, pentru a nu mări nejustificat lungimea lucrării, întrucît rezultatele referitoare la acest subiect erau deja stabilite, autorul neavînd contribuţii originale în acest sens.

Capitolul 5 detaliază cercetările referitoare la *concurenţă* în reţelele Petri, precum şi la măsura acesteia. Şi acest capitol este divizat în trei mari părţi, dedicate celor trei categorii de reţele Petri considerate în această lucrare:

- Primul subcapitol este dedicat reţelelor Petri clasice. Noţiunea de grade de concurenţă pentru reţele P/T a fost introdusă pentru prima dată de colectivul de cercetare de la Facultatea de Informatică din Iaşi.

  În prima parte a acestui subcapitol, este introdusă o definiţie mai intuitivă a noţiunii de *grade de concurenţă* pentru reţele P/T, dar şi mai generală, întrucît se ia în considerare şi situaţia tranziţiilor posibile simultan cu ele însele la o marcare.

  De asemenea, am introdus şi o noţiune mai fină, aceea de grade de concurenţă *relativ la un set de tranziţii*, care ignoră anumite tranziţii ale reţelei.

  În a doua parte a acestui subcapitol, am arătat cum se pot calcula toate cele trei categorii de grade de concurenţă (i.e., gradul local la o marcare oarecare, şi gradele globale, inferior şi superior, care iau în calcul gradele locale corespunzătoare tuturor marcărilor accesibile ale reţelei).

  În ultima parte a acestui subcapitol, am luat în considerare problema modularizării, studiind legătura dintre gradele de concurenţă a unei reţele şi gradele de concurenţă ale subreţelelor componente ale acesteia.

- Al doilea subcapitol este dedicat reţelelor Petri cu salturi.

  Gradele de concurenţă pentru reţelele cu salturi le-am definit asemănător ca cele pentru reţelele P/T, folosind noţiunea de *j-accesibilitate* în locul celei de *accesibilitate* de la reţele P/T.

  În a doua parte a acestui subcapitol am arătat că rezultatele de calculabilitate de la reţele P/T se păstrează pentru subclasa reţelelor cu salturi finite.

Iar în a treia parte a acestui subcapitol am arătat că se păstrează de la reţele P/T o parte dintre rezultatele referitoare la legătura dintre gradele de concurenţă a unei reţele şi gradele de concurenţă ale subreţelelor componente ale acesteia.

- Ultimul subcapitol este dedicat reţelelor Petri de nivel înalt.

  Şi anume, am definit grade de concurenţă pentru *reţele Petri colorate cu mulţimi de culori finite* prin extensia naturală a definiţiilor de la reţele P/T. În plus, am arătat că rezultatele de calculabilitate de la reţele P/T, precum şi cele referitoare la modularizare, se păstrează şi pentru reţelele colorate cu mulţimi de culori finite.

Lucrarea se încheie cu prezentarea concluziilor generale şi a direcţiilor de cercetare viitoare.

Primele trei anexe de la sfîrşitul acestei lucrări prezintă definiţiile de bază şi notaţiile, referitoare la limbaje formale, mulţimi şi multiseturi, şi, respectiv, arbori şi grafuri, utilizate în această lucrare. Anexa a patra prezintă două exemple de modelare prin reţele Petri cu inhibiţie şi verificare a proprietăţilor prin tehnica invarianţilor. Ultima anexă tratează subiectul modului de calcul a marcărilor accesibile minimale pentru reţele P/T şi prezintă unele rezultate conexe.

Contribuţii

Din cele aproape 140 de referinţe bibliografice ale lucrării de faţă, 25 sunt contribuţii originale ale autorului, ca autor unic sau co-autor, concretizate în articole recenzate şi publicate în reviste de specialitate (Acta Cybernetica, analele ştiinţifice de la Iaşi, Cluj, Baia Mare, Chişinău, ş.a.), în volumele unor conferinţe, simpozioane, etc. interne şi internaţionale (ARW CIPC 2003, MOVEP 2000 & 2002, ICCC 2004, CAIM 2003 & 2004, SACCS 2001 & 2004, Chişinău 2001, 2003 & 2004, CITTI 2000, ş.a.), sau ca rapoarte tehnice de cercetare (la Iaşi şi Hamburg).

Se cuvine menţionat faptul că rezultatele cuprinse în lucrarea de faţă sunt rodul unor cercetări efectuate în cadrul unui număr de contracte de cercetare finanţate de CNCSIS în perioada 1997–2002, dintre care se pot aminti:

- grantul CNCSU 42/1573 din 1997 – "Reţele Petri, modele ale concurenţei şi distribuţiei", director: Prof. dr. Toader Jucan;

- granturile CNCSIS 18/178, 7/193, 29/27 din 1999–2001 – "Reţele Petri în modelarea, analiza şi sinteza sistemelor", director: Prof. dr. Toader Jucan;

- grantul CNCSIS 9/600 din 2002 – "Studiul reţelelor Petri de nivel înalt, cu aplicaţii în modelarea şi analiza sistemelor concurente / distribuite", director: Prof. dr. Toader Jucan.

De asemenea, o parte din conţinutul lucrării de faţă se bazează pe experienţa acumulată de autor în cadrul unui stagiu de pregătire de 3 luni pe care l-a desfăşurat în 1999 la Facultatea de Informatică a Universităţii din Hamburg, Germania, precum şi a altor stagii de durată mai mică (1-2 săptămîni) desfăşurate la o serie de şcoli de vară internaţionale în perioada 2000–2004.

Mulţumiri

Fără sprijinul permanent al domnului prof. univ. dr. Toader Jucan, conducătorul ştiinţific de doctorat, această lucrare nu ar fi văzut niciodată lumina tiparului. De altfel, domnul prof. dr. Toader Jucan a fost cel care mi-a sugerat o parte dintre ideile noi ale tezei şi cel care m-a sprijinit constant în cercetările mele, concretizate în articole publicate împreună, pentru care îi mulţumesc şi îi rămîn profund recunoscător.

Mulţumesc domnului prof. dr. hab. Dumitru Todoroi, de la Academia de Ştiinţe Economice din Chişinău, sub îndrumarea căruia mi-am început doctoratul.

De asemenea, mulţumesc domnului prof. dr. Ferucio Laurenţiu Ţiplea, pentru încurajările şi sprijinul constant acordat de-a lungul anilor de doctorat.

Mulţumesc domnului prof. dr. Manfred Kudlek, de la Facultatea de Informatică a Universităţii din Hamburg, Germania, pentru bunăvoinţa şi amabilitatea cu care m-a sprijinit pe parcursul şederii mele în Germania în 1999 în cadrul unui stagiu de pregătire de 3 luni pe care l-am desfăşurat la acea facultate.

Mulţumesc domnului prof. dr. Cristian Masalagiu, membru al comisiei de doctorat, pentru sprijinul pe care mi l-a acordat pe parcursul anilor şi pentru aprecierile asupra tezei făcute în calitate de referent ştiinţific.

Mulţumesc, de asemenea, domnului prof. dr. Adrian Atanasiu şi domnului prof. dr. Octavian Păstrăvanu, membri ai comisiei de doctorat, pentru sugestiile şi aprecierile făcute, pentru sprijinul acordat, pentru amabilitatea de a participa la această comisie.

În sfîrşit, dar nu în ultimul rînd, doresc să mulţumesc familiei mele pentru încurajările şi sprijinul oferite pe parcursul scrierii acestei lucrări.

Iaşi, 17 decembrie 2004
Cristian Vidraşcu

Cuprins

Lista figurilor

Capitolul 1

Reţele Petri. Noţiuni introductive

Reţelele Petri sunt un model matematic utilizat pentru modelarea, analiza şi sinteza sistemelor distribuite. Istoria lor a început în 1962 cu lucrarea de doctorat a lui Carl Adam Petri ([74]). Unul dintre modelele matematice folosite pentru modelarea sistemelor reale secvenţiale era acela al automatelor finite, sau altfel spus al sistemelor tranziţionale de tip stare-acţiune.

Un astfel de model este definit printr-o mulţime de stări S (starea sistemului modelat la un moment dat este reprezentată global printr-un element al mulţimii de stări S), o mulţime de tranziţii T (care modelează acţiunile (sau evenimentele) ce se pot produce în sistemul real modelat), şi o funcţie de tranziţie $\delta : S \times T \to \mathcal{P}(S)$ care descrie evoluţia sistemului, specificînd pentru fiecare stare $s \in S$ şi fiecare tranziţie $t \in T$, starea $\delta(s,t)$ în care trece sistemul dacă era în starea s şi s-a produs acţiunea (evenimentul) t. În general, mulţimea $\delta(s,t)$ poate conţine o stare $s' \in S$, sau poate fi vidă (ceea ce înseamnă că tranziţia t nu se poate produce la starea s), sau poate conţine mai multe stări (ceea ce înseamnă că prin producerea tranziţiei t sistemul trece, în mod nedeterminist, într-una dintre aceste stări). În cazul particular cînd se modelează un sistem determinist, funcţia de tranziţie a modelului poate fi considerată ca o funcţie parţială de forma $\delta : S \times T \to S$, cu semnificaţia $\delta(s,t) \uparrow$ (i.e., este nedefinită) dacă şi numai dacă t nu este posibilă la s.

Neajunsul acestor modele este acela că pot modela doar o clasă restrînsă de sisteme (sau fenomene) reale, deoarece sistemele reale au o complexitate sporită: starea globală a sistemului constă dintr-un ansamblu al stărilor locale ale subsistemelor constituente ale acelui sistem, iar evoluţia sistemului constă din producerea concurentă a unor acţiuni (sau evenimente) locale subsistemelor sau de interacţiune între subsisteme ori cu mediul exterior.

Deci pentru a putea fi modelate astfel de sisteme era nevoie de un nou tip de model, care să poată surprinde aspectele de concurenţă şi de stare distribuită a sistemelor reale.

Pornind de la aceste modele secvenţiale, C. A. Petri a avut ideea de modelare a sistemelor paralele şi distribuite prin divizarea stării sistemului în anumite elemente care să caracterizeze stările locale ale subsistemelor constituente, un element putând face parte din mai multe stări locale (exemplu: resurse partajabile - harddisk, imprimantă, etc.), şi prin caracterizarea evoluţiei sistemului printr-o execuţie concurentă a unor tranziţii locale. Aceste modele de sisteme tranziţionale concurente au fost denumite *reţele Petri*, după numele celui care le-a creat.

În funcţie de complexitatea sistemului real modelat şi de scopul pentru care este utilizat modelul sistemului respectiv, adică în funcţie de gradul de precizie/acurateţe cu care se doreşte să se modeleze sistemul respectiv, s-au elaborat diferite tipuri de modele (i.e., tipuri de reţele Petri) care să surprindă în mod corespunzător gradul dorit de acurateţe al modelării.

Primul model, şi cel mai simplu, a fost cel al reţelelor Petri de tip C/E (reţele condiţie/eveniment), model care poate surprinde doar aspectul calitativ al sistemelor (sau fenomenelor) modelate.

Modelul imediat următor elaborat a fost cel al reţelelor Petri de tip P/T (reţele locaţie/tranziţie), care au fost introduse ca o generalizare a reţelelor de tip C/E : ele pot surprinde şi aspectul cantitativ al sistemelor modelate: locaţiile reţelei pot conţine mai multe puncte (pînă la un număr maxim precizat, numit capacitatea locaţiei), spre deosebire de reţelele C/E a căror locaţii pot conţine cel mult un punct.

Pentru a putea modela sisteme cu o complexitate sporită prin reţele nu prea complicate, deci uşor de studiat, următoarea idee a fost să se considere că punctele din locaţii au ataşat cîte un tip dintr-o mulţime fixată de tipuri (sau sorturi, sau culori), deci pot fi diferenţiate între ele, locaţiile putând conţine puncte din fiecare tip. Astfel s-au introdus reţelele Petri de nivel înalt: reţele Pr/E (reţele predicat/eveniment), reţele Pr/T (reţele predicat/tranziţie), reţele relaţionale şi reţele colorate.

De asemenea, de-a lungul timpului, pornind de la reţelele P/T clasice, s-au mai elaborat o serie întreagă de reţele Petri prin modificarea regulilor de aplicabilitate şi/sau de calcul a tranziţiilor, cum ar fi: reţele Petri cu salturi (utile pentru a modela sisteme de tip "cutie-neagră": sisteme în care anumite tranziţii nu pot fi puse în evidenţă de către observatorul sistemului, acesta putând doar să observe evoluţia sistemului, adică să observe doar efectul acestor acţiuni), reţele cu inhibiţie, reţele cu priorităţi, reţele controlate prin automate, reţele sub strategie de maxim, reţele cu auto-modificare, ş.a. O descriere a diferitelor extensii ale reţelelor Petri poate fi găsită în [48].

Deoarece scopul modelelor matematice este studierea evoluţiei şi a proprietăţilor sistemului modelat, iar aceste proprietăţi sunt modelate prin anumite obiecte matematice sau proprietăţi ale modelului matematic, este necesară găsirea unor metode de calcul (algoritmi de decizie) a acestor proprietăţi.

Un asemenea obiect matematic sunt structurile de acoperire pentru reţele Petri, cu ajutorul cărora se pot soluţiona cîteva probleme de decizie (şi anume: problema acoperirii, problema mărginirii, problema pseudo-viabilităţii, problema finititudinii mulţimii de accesibilitate, problema finititudinii arborelui de accesibilitate şi problema regularităţii) şi se poate măsura gradul de concurenţă al reţelei.

Un alt obiect matematic util s-a dovedit a fi calculul cu invarianţi; S-invarianţii şi T-invarianţii sunt nişte tehnici de algebră liniară utilizate în studiul reţelelor Petri pentru verificarea proprietăţilor lor.

În acest capitol se vor stabili noţiunile de bază, notaţiile şi terminologia necesare cititorului pentru înţelegerea acestei lucrări, referitoare atît la reţele Petri clasice P/T, cît şi la reţele Petri cu salturi şi la cele de nivel înalt.

Mai întîi, se cuvine menţionat faptul că în anexele de la sfîrşitul acestei lucrări pot fi găsite definiţiile de bază şi notaţiile, utilizate în această lucrare, referitoare la limbaje formale, multiseturi şi, respectiv, arbori şi grafuri etichetate.

1.1 Reţele Petri P/T

După cum am amintit mai sus, primul model, şi cel mai simplu, a fost cel al reţelelor Petri de tip C/E (reţele condiţie/eveniment), model introdus prin lucrarea de doctorat a lui C. A. Petri ([74]). Noţiunile de condiţie şi eveniment au fost noţiuni fundamentale încă de la începuturile teoriei reţelelor Petri. Studii intensive ale acestui prim model pot fi găsite în lucrările [32, 31, 26, 75]. O variantă foarte asemănătoare a acestui model a fost cea a sistemelor reţea elementare (pentru detalii în acest sens se pot consulta lucrările [89, 86, 19]).

Modelul imediat următor elaborat a fost cel al reţelelor Petri de tip P/T (reţele locaţie/tranziţie), care au fost introduse ca o generalizare a reţelelor de tip C/E : ele pot surprinde şi aspectul cantitativ al sistemelor modelate: locaţiile reţelei pot conţine mai multe puncte (pînă la un număr maxim precizat, numit capacitatea locaţiei), spre deosebire de reţelele C/E a căror locaţii pot conţine cel mult un punct.

Această secţiune prezintă noţiunile de bază, notaţiile şi terminologia referitoare la reţele Petri clasice P/T. Pentru detalii se pot consulta lucrările

[6, 80, 83, 76, 72, 58, 47]; în principiu, am urmat abordarea din monografia (Jucan & Ţiplea [48]).

1.1.1 Definiţii şi notaţii

Definiţia 1.1.1 *Prin* reţea Petri P/T*, sau* reţea locaţie/tranziţie*, pe scurt* P/T-reţea*, (finită, şi cu capacităţi infinite), abreviat PTN, se înţelege orice 4-uplu* $\Sigma = (S, T, F, W)$*, unde:*

(i) S *şi* T *sunt două mulţimi finite şi nevide (de* locaţii *şi, respectiv, de* tranziţii*), cu* $S \cap T = \emptyset$*;*

(ii) $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$ *este* relaţia de flux*;*

(iii) $W : (S \times T) \cup (T \times S) \to \mathbb{N}$ *este* funcţia de pondere *a lui* Σ*, ce satisface relaţia* $W(x, y) = 0$ *dacă şi numai dacă* $(x, y) \notin F$*.*

Prin urmare, structura unei reţele Petri clasice este aceea a unui graf orientat bipartit cu arce etichetate, cele două tipuri de noduri numindu-se locaţii şi, respectiv, tranziţii.

Notaţia 1.1.1 *Fie* $\Sigma = (S, T, F, W)$ *o P/T-reţea. Dacă* $x \in S \cup T$*, mulţimile desemnate prin* ${}^\bullet x = \{y \in S \cup T \mid (y, x) \in F\}$ *şi, respectiv,* $x^\bullet = \{y \in S \cup T \mid (x, y) \in F\}$ *se vor numi* premulţimea*, respectiv* postmulţimea*, lui* x*. Iar dacă* $X \subseteq S \cup T$*, mulţimile desemnate prin* ${}^\bullet X = \cup\{{}^\bullet x | x \in X\}$ *şi, respectiv,* $X^\bullet = \cup\{x^\bullet | x \in X\}$ *se vor numi* premulţimea*, respectiv* postmulţimea*, lui* X*.*

Definiţia 1.1.2 *Fie* $\Sigma = (S, T, F, W)$ *o P/T-reţea. Un element* $x \in S \cup T$ *este numit* izolat *dacă* ${}^\bullet x \cup x^\bullet = \emptyset$*.*

Definiţia 1.1.3 *Prin* reţeaua Petri suport *a unei P/T-reţele* $\Sigma = (S, T, F, W)$ *se înţelege 3-uplul* $N = (S, T, F)$*. Reţeaua suport* N *este numită* pură *dacă pentru orice* $x \in S \cup T$*,* ${}^\bullet x \cap x^\bullet = \emptyset$*. Reţeaua suport* N *este numită* simplă *dacă pentru orice* $x, y \in S \cup T$*, relaţiile* ${}^\bullet x = {}^\bullet y$ *şi* $x^\bullet = y^\bullet$ *implică* $x = y$*.*

Definiţia 1.1.4 *Prin* marcare *a unei P/T-reţele* Σ *se înţelege orice funcţie* $M : S \to \mathbb{N}$*. Mulţimea* $\mathbb{N}^S$ *denotă mulţimea tuturor marcărilor lui* Σ*.*

Marcările se vor identifica uneori cu vectorii $|S|$-dimensionali. Operaţiile şi relaţiile cu vectori sunt definite pe componente.

Definiţia 1.1.5 *Se numeşte* reţea locaţie/tranziţie marcată*, abreviat mPTN, orice pereche* $\gamma = (\Sigma, M_0)$*, unde* Σ *este o PTN şi* M_0 *este o marcare a lui* Σ*, numită* marcarea iniţială *a lui* γ*.*

În cele ce urmează vom utiliza adeseori termenul de "reţea Petri" (PN) sau "reţea" atunci cînd ne vom referi la o PTN sau o $mPTN$ fără a fi necesar să-i specificăm tipul (i.e., marcată sau nemarcată).

Reprezentarea grafică a unei reţele Petri constă în aceea a unui graf orientat bipartit, avînd nodurile de tip locaţie reprezentate printr-un cerc şi cele de tip tranziţie printr-un pătrat, şi cu arcele orientate etichetate cu numere întregi pozitive. Mai mult, în cazul reţelelor marcate, marcarea iniţială se reprezintă grafic prin desenarea a $M_0(s)$ puncte în cercul corespunzător locaţiei s, pentru fiecare locaţie a reţelei.

Definiţia 1.1.6 *Fie* Σ *o reţea,* $t \in T$ *o tranziţie, şi* $w \in T^*$ *o secvenţă de tranziţii. Funcţiile* $t^- : S \to \mathbb{N}$*,* $t^+ : S \to \mathbb{N}$*,* $\Delta t : S \to \mathbb{Z}$ *şi* $\Delta w : S \to \mathbb{Z}$ *sunt definite prin:*

(i) $t^-(s) = W(s,t), \forall\, s \in S$;

(ii) $t^+(s) = W(t,s), \forall\, s \in S$;

(iii) $\Delta t(s) = t^+(s) - t^-(s), \forall\, s \in S$;

(iv) $$\Delta w(s) = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } w = \lambda, \\ \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i(s) & \text{, dacă } w = t_1 t_2 \ldots t_n \ (n \geq 1), \end{cases} \quad \forall\, s \in S.$$

Pentru descrierea părţii dinamice (i.e., evoluţiei) a unei reţele, s-au definit mai multe tipuri de semantici: evoluţie secvenţială, evoluţie concurentă de tip (multi-)mulţime, şi evoluţie concurentă de tip proces.

Ultima dintre acestea – noţiunea de *proces* – surprinde cel mai adecvat cu putinţă aspectele legate de producerea concurentă a tranziţiilor, şi relaţiile de independenţă sau de tip cauză–efect a producerii lor, fiind introdusă de C. A. Petri şi a fost definită formal în lucrările [26], [39]. De asemenea, o prezentare a acestei noţiuni poate fi găsită în [86] sau în monografia (Jucan & Ţiplea [48]).

În continuare va fi amintită prima dintre acestea, cea mai simplă, în care la fiecare pas al evoluţiei reţelei se poate produce o singură tranziţie. Această semantică corespunde modelării prin *interleaving* a concurenţei producerii tranziţiilor, şi este suficientă pentru chestiunile abordate în capitolele următoare ale lucrării, cu excepţia capitolului dedicat gradelor de concurenţă, în care vom utiliza ca semantică evoluţia concurentă de tip multi-mulţime (definiţia ei va fi amintită în cadrul capitolului respectiv).

Definiţia 1.1.7 *Evoluţia secvenţială a unei reţele* Σ *este dată de aşa-numita* regulă de tranziţie*, care constă în:*

(RA) regula de aplicabilitate*: o tranziţie* t *este* posibilă *la marcarea* M *în* Σ*, abreviat* $M[t\rangle_\Sigma$ *, dacă şi numai dacă* $t^- \leq M$ *;*

(RC) regula de calcul*: dacă* $M[t\rangle_\Sigma$*, atunci* t *poate* apare la M *producînd o nouă marcare* M'*, abreviat* $M[t\rangle_\Sigma M'$*, definită prin:* $M' = M + \Delta t$*.*

Notaţia "$[.\rangle_\Sigma$" va fi simplificată la "$[.\rangle$" ori de cîte ori Σ va fi subînţeleasă din context.

Observaţia 1.1.1 *Se constată că, în acest fel, pentru orice tranziţie* t *a reţelei* Σ *s-a definit o relaţie binară pe* $\mathbb{N}^S$*, notată* $[t\rangle_\Sigma$*, prin:*

$$M[t\rangle_\Sigma M' \quad \Leftrightarrow \quad t^- \leq M \text{ şi } M' = M + \Delta t\,.$$

Notaţia 1.1.2 *Dacă* $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $(n \geq 1)$ *sunt tranziţii ale reţelei* Σ*, se va nota prin* $[t_1 t_2 \ldots t_n\rangle_\Sigma$ *compunerea clasică a relaţiilor* $[t_1\rangle_\Sigma, [t_2\rangle_\Sigma, \ldots, [t_n\rangle_\Sigma$*, i.e.*

$$[t_1 t_2 \ldots t_n\rangle_\Sigma = [t_1\rangle_\Sigma \circ \ldots \circ [t_n\rangle_\Sigma\,.$$

În plus, se consideră relaţia $[\lambda\rangle_\Sigma$ *dată prin:*

$$[\lambda\rangle_\Sigma = \{(M, M) \mid M \in \mathbb{N}^S\}\,.$$

Definiţia 1.1.8 *Fie* Σ *o reţea Petri şi* $M \in \mathbb{N}^S$ *o marcare a lui* Σ*. Spunem că* $w \in T^*$ *este* secvenţă de tranziţie *de la* M *în* Σ *dacă există o marcare* M' *a lui* Σ *astfel încât* $M\,[w\rangle_\Sigma\, M'$*. Mulţimea tuturor secvenţelor de tranziţie de la* M *în* Σ *se notează cu* $TS(\Sigma, M)$*, i.e.*

$$TS(\Sigma, M) = \{w \in T^* |\ M\,[w\rangle_\Sigma\}\,.$$

Dacă $\gamma = (\Sigma, M_0)$ *este o reţea P/T marcată, atunci, în cazul* $M = M_0$*,* $TS(\Sigma, M_0)$ *se abreviază cu* $TS(\gamma)$ *şi se numeşte* mulţimea secvenţelor de tranziţie ale reţelei γ*.*

Definiţia 1.1.9 *Fie* Σ *o reţea Petri şi* $M, M' \in \mathbb{N}^S$ *două marcări ale lui* Σ*. Marcarea* M' *se numeşte* accesibilă *de la* M *în* Σ *dacă există o secvenţă de tranziţie* w *astfel încât* $M\,[w\rangle_\Sigma\, M'$*. Mulţimea tuturor marcărilor accesibile de la* M *în* Σ *se notează cu* $RS(\Sigma, M)$ *sau* $[M\rangle_\Sigma$*, i.e.*

$$RS(\Sigma, M) = [M\rangle_\Sigma = \{M' \in \mathbb{N}^S |\ \exists\, w \in TS(\Sigma, M) : M\,[w\rangle_\Sigma\, M'\}\,.$$

Dacă $\gamma = (\Sigma, M_0)$ *este o reţea P/T marcată, atunci, în cazul* $M = M_0$*,* $RS(\Sigma, M_0)$ *se abreviază cu* $RS(\gamma)$ *(sau cu* $[M_0\rangle_\gamma$*) şi se numeşte* mulţimea marcărilor accesibile ale reţelei γ *sau, pe scurt,* mulţimea de accesibilitate a lui γ*.*

Notaţia 1.1.3 *Fie Σ o reţea Petri. Mulţimea tuturor tranziţiilor reţelei Σ care sunt posibile la marcarea $M \in \mathbb{N}^S$ se notează cu $T(\Sigma, M)$, i.e.*

$$T(\Sigma, M) = \{t \in T | \ M\,[t\rangle_\Sigma\}\,.$$

Această notaţie va fi simplificată la $T(M)$ ori de cîte ori Σ va fi subînţeleasă din context.

Observaţia 1.1.2 *Detalii despre complexitatea reţelelor Petri pot fi consultate în lucrările [37] şi (Ţiplea & Jucan [96]).*

1.1.2 Proprietăţi şi probleme de decizie

În continuare se vor trece în revistă cîteva noţiuni ce descriu o serie de proprietăţi ale reţelelor Petri P/T, precum şi problemele de decizie asociate acestora.

Definiţia 1.1.10 *Fie γ o reţea P/T marcată. Marcarea M este* acoperibilă *în γ dacă există o marcare accesibilă M' a lui γ astfel încât $M \leq M'$.*

Definiţia 1.1.11 *Fie γ o reţea P/T marcată.*
i) O locaţie $s \in S$ este mărginită *dacă există un număr natural $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $M(s) \leq k, \forall\, M \in [M_0\rangle_\gamma$.*
ii) O mulţime de locaţii $S' \subseteq S$ este mărginită *dacă toate locaţiile $s \in S'$ sunt mărginite.*
iii) Reţeaua γ este mărginită *dacă mulţimea S este mărginită.*

Definiţia 1.1.12 *Fie γ o reţea P/T marcată.*
i) O mulţime de locaţii $S' \subseteq S$ este simultan nemărginită *dacă pentru orice număr natural $k \in \mathbb{N}$ există o marcare accesibilă $M_k \in [M_0\rangle_\gamma$ astfel încât $M_k(s) \geq k, \forall\, s \in S'$.*
ii) Reţeaua γ este simultan nemărginită *dacă mulţimea S este simultan nemărginită.*

Evident, dacă o mulţime de locaţii S' este simultan nemărginită, atunci ea este şi nemărginită, dar reciproca nu este întotdeauna adevărată.

Definiţia 1.1.13 *Fie γ o reţea P/T marcată.*
i) O tranziţie $t \in T$ este pseudo-viabilă *dacă există o marcare accesibilă $M \in [M_0\rangle_\gamma$ astfel încât t este posibilă la M, i.e. $M[t\rangle_\gamma$.*
ii) O tranziţie care nu este pseudo-viabilă se numeşte tranziţie moartă.
iii) Reţeaua γ este pseudo-viabilă *dacă toate tranziţiile sale sunt pseudo-viabile.*

Observaţia 1.1.3 *Cunoaşterea tranziţiilor moarte ale unei reţele P/T marcate (această problemă este rezolvabilă, după cum vom vedea în continuare) are importanţă practică, deoarece se poate simplifica reţeaua (prin eliminarea tuturor tranziţiilor moarte) fără a i se modifica comportamentul (i.e. reţeaua simplificată este echivalentă cu cea iniţială).*

Definiţia 1.1.14 *Fie γ o reţea P/T marcată.*
i) O tranziţie $t \in T$ este viabilă *dacă pentru orice marcare accesibilă $M \in [M_0\rangle_\gamma$ există o marcare $M' \in [M\rangle_\gamma$ (i.e., accesibilă din M) astfel încât t este posibilă la M', i.e. $M'[t\rangle_\gamma$.*
ii) Reţeaua γ este viabilă *dacă toate tranziţiile sale sunt viabile.*

Evident, orice tranziţie viabilă este şi pseudo-viabilă, dar reciproca nu este întotdeauna adevărată.

Definiţia 1.1.15 Limbajul $L(\gamma)$ *generat de reţeaua marcată γ este mulţimea secvenţelor de tranziţie posibile de la marcarea iniţială:*

$$L(\gamma) = TS(\gamma, M_0) = \{w \in T^* \mid M_0[w\rangle_\gamma\}.$$

Observaţia 1.1.4 *Au fost definite şi alte tipuri de limbaje generate de o reţea Petri:*

1. *limbajul terminal, în care se iau în calcul doar secvenţele de tranziţie posibile de la marcarea iniţială pînă la o marcare dintr-o mulţime finită de marcări finale ce este aprioric dată;*

2. *limbajele etichetate (obişnuit şi terminal) generate de o reţea Petri înzestrată cu o funcţie $h : T \to X \cup \{\lambda\}$ de etichetare a tranziţiilor – fiecare tranziţie este etichetată cu un simbol dintr-o mulţime X finită de etichete dată aprioric, sau, eventual, poate fi etichetată şi cu λ (cuvîntul vid), iar limbajul este format din imaginea prin această funcţie de etichetare (de fapt, prin extensia sa homomorfică $h : T^* \to X^*$) a secvenţelor de tranziţie corespunzătoare limbajului neetichetat (cel obişnuit, şi respectiv cel terminal).*

Am considerat că nu este necesară specificarea mai multor detalii despre aceste tipuri de limbaje, deoarece ele nu constituie subiectul acestei lucrări. Mai multe amănunte despre aceste tipuri de limbaje, despre proprietăţile şi ierarhia lor pot fi consultate în lucrările [28, 71, 15, 36, 38], (Ţiplea [91, 92]), (Ţiplea & Jucan [97]).

În continuare, voi enumera principalele probleme de decizie referitoare la reţele P/T marcate (împreună cu predicatele asociate acestora):

1) *Problema accesibilităţii* (RP) :
Date γ o $mPTN$ şi M o marcare a reţelei γ, este M accesibilă în γ?

Predicatul asociat este: $RP(\gamma, M) = true \Leftrightarrow M \in RS(\gamma)$.

2) *Problema finititudinii mulţimii de accesibilitate* (FRSP) :
Dată γ o $mPTN$, este $RS(\gamma)$ mulţime finită?

Predicatul asociat este: $FRSP(\gamma) = true \Leftrightarrow RS(\gamma)$ este finită.

3) *Problema finititudinii arborelui de accesibilitate* (FRTP) :
Dată γ o $mPTN$, este $\mathcal{RT}(\gamma)$ arbore finit? (Definiţia arborelui de accesibilitate $\mathcal{RT}(\gamma)$ al unei $mPTN$ γ va fi prezentată în capitolul 3.)

Predicatul asociat este: $FRTP(\gamma) = true \Leftrightarrow \mathcal{RT}(\gamma)$ este finit.

4) *Problema acoperirii* (CP) :
Date γ o $mPTN$ şi M o marcare a reţelei γ, este M acoperibilă în γ?

Predicatul asociat este: $CP(\gamma, M) = true \Leftrightarrow M$ este acoperibilă în γ.

5) *Problema mărginirii* (BP) :

   a) Date γ o $mPTN$ şi s o locaţie a reţelei γ, este s mărginită în γ?
   Predicatul asociat este: $BP(\gamma, s) = true \Leftrightarrow s$ este mărginită în γ.

   b) Date γ o $mPTN$ şi $S' \subseteq S$ o mulţime de locaţii ale reţelei γ, este S' mărginită în γ?
   Predicatul asociat: $BP'(\gamma, S') = true \Leftrightarrow S'$ este mărginită în γ.

   c) Dată γ o $mPTN$, este γ mărginită?
   Predicatul asociat este: $BP''(\gamma) = true \Leftrightarrow \gamma$ este mărginită.

6) *Problema nemărginirii simultane* (SUbP) :

   a) Date γ o $mPTN$ şi $S' \subseteq S$ o mulţime de locaţii ale reţelei γ, este S' simultan nemărginită în γ?
   Predicatul asociat este: $SUbP(\gamma, S') = true \Leftrightarrow S'$ este simultan nemărginită în γ.

   b) Dată γ o $mPTN$, este γ simultan nemărginită?
   Predicatul asociat este: $SUbP'(\gamma) = true \Leftrightarrow \gamma$ este simultan nemărginită.

7) *Problema pseudo-viabilităţii* (QLP) :

a) Date γ o $mPTN$ şi t o tranziţie a lui γ, este t pseudo-viabilă în γ?
Predicatul asociat este: $QLP(\gamma, t) = true \Leftrightarrow t$ este pseudo-viabilă în γ.

b) Dată γ o $mPTN$, este γ pseudo-viabilă?
Predicatul asociat este: $QLP'(\gamma) = true \Leftrightarrow \gamma$ este pseudo-viabilă.

8) *Problema viabilităţii* (LP) :

a) Date γ o $mPTN$ şi t o tranziţie a reţelei γ, este t viabilă în γ?
Predicatul asociat este: $LP(\gamma, t) = true \Leftrightarrow t$ este viabilă în γ.

b) Dată γ o $mPTN$, este γ viabilă?
Predicatul asociat este: $LP'(\gamma) = true \Leftrightarrow \gamma$ este viabilă.

9) *Problema regularităţii* (RegP) :
Dată γ o $mPTN$, este limbajul $L(\gamma)$ regulat?

Predicatul asociat este: $RegP(\gamma) = true \Leftrightarrow L(\gamma)$ este limbaj regulat.

Observaţia 1.1.5 *Direct de la definiţiile de mai sus avem:*

(i) $BP'(\gamma, S') \equiv \wedge \{BP(\gamma, s) \mid s \in S'\}$
(membrul drept este o conjuncţie finită de predicate BP deoarece am considerat doar reţele finite, şi deci S' este o mulţime finită de locaţii) ;

(ii) $BP''(\gamma) \equiv BP'(\gamma, S) \equiv \wedge \{BP(\gamma, s) \mid s \in S\}$ *;*

(iii) $BP(\gamma, s) \equiv \neg\ SUbP(\gamma, \{s\})$ *;*

(iv) $SUbP'(\gamma) \equiv SUbP(\gamma, S)$ *;*

(v) $QLP'(\gamma) \equiv \wedge \{QLP(\gamma, t) \mid t \in T\}$
(membrul drept este o conjuncţie finită de predicate QLP deoarece am considerat doar reţele finite, deci mulţimea de tranziţii T este finită) ;

(vi) $LP'(\gamma) \equiv \wedge \{LP(\gamma, t) \mid t \in T\}$
(membrul drept este o conjuncţie finită de predicate LP, din acelaşi motiv ca mai sus) ;

(vii) $QLP(\gamma, t) \equiv CP(\gamma, t^-)$ *,*

unde $\equiv$ *este relaţia de echivalenţă logică a predicatelor.*

Prin urmare, problemele (BP') şi (BP'') sunt reductibile la problema (BP), aceasta este reductibilă la $(SUbP)$, iar problemele $(SUbP')$, (QLP') şi (LP') sunt reductibile respectiv la $(SUbP)$, (QLP) şi (LP).

Observaţia 1.1.6 *Sunt binecunoscute următoarele rezultate referitoare la decidabilitatea problemelor enumerate mai sus:*

(i) Problema accesibilităţii (RP) este decidabilă (i.e. predicatul RP este recursiv decidabil).
Prima menţionare a acestei probleme datează încă din 1969 (Karp şi Miller). Diverşi cercetători au prezentat soluţii parţtiale de-a lungul timpului, de exemplu van Leeuwen (1974), Hopcroft şi Pansiot (1979). Una dintre primele demonstraţii de decidabilitate (cea a lui Sacerdote şi Tenney – 1977) s-a dovedit a fi eronată la o examinare mai amănunţită. Două demonstraţii complete au fost publicate în mod independent de către Mayr ([66], [67] – 1981, 1984) şi de către Kosajaru ([54] – 1982). O demonstraţie a acestei probleme poate fi găsită în monografia [85];

(ii) Problema (CP) este reductibilă la problema (QLP), şi reciproc, problema (QLP) este reductibilă la problema (CP) ([72]; vezi şi relaţia (*vii*) *de la observaţia 1.1.5);*

(iii) Problema (SUbP) este decidabilă ([10]);

(iv) Problemele (CP) şi (QLP), (FRSP), (FRTP), (BP) şi (RegP) sunt toate decidabile utilizînd structurile de acoperire pentru reţele Petri (voi prezenta mai multe detalii despre aceasta în secţiunea 3.1 din capitolul 3).

(v) Pentru problema viabilităţii (LP) încă nu s-a găsit o rezolvare generală a ei. Se cunosc însă multe clase de reţele Petri pentru care această problemă este decidabilă.

1.1.3 Pseudo-marcări

Pentru a putea defini structuri de acoperire pentru reţele Petri, se adaugă la mulţimea numerelor întregi nenegative $\mathbb{N}$ un nou simbol ω, ce joacă rolul lui "$+\infty$". Se notează prin $\mathbb{N}_\omega$ mulţimea astfel obţinută, i.e. $\mathbb{N}_\omega = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$.

Definiţia 1.1.16 *Operaţiile* $+$ *şi* $-$ *şi relaţia de ordine* $<$ *se extind la mulţimea* $\mathbb{N}_\omega$ *prin:*

(i) $n + \omega = \omega + n = \omega + \omega = \omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\omega - n = \omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) $n < \omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definiţia 1.1.17 *Funcţiile $M : S \to \mathbb{N}_\omega$ se vor numi* pseudo-marcări *(sau* ω-marcări*). $\mathbb{N}_\omega^S$ denotă mulţimea tuturor pseudo-marcărilor.*

Pseudo-marcările vor fi identificate uneori prin vectori $|S|$-dimensionali, la fel ca la marcări. Dacă M este o pseudo-marcare, atunci componentele ce conţin ω vor mai fi numite şi *ω-componente*, iar mulţimea tuturor acestor ω-componente va fi notată prin $\Omega(M)$, i.e. $\Omega(M) = \{s \in S \mid M(s) = \omega\}$.

Evident, orice marcare este o pseudo-marcare (fără ω-componente).

Regula de tranziţie de la marcări se consideră extinsă la pseudo-marcări, adică, date M şi M' două pseudo-marcări şi t o tranziţie, se spune că $M[t\rangle_\Sigma$ dacă şi numai dacă este îndeplinită *regula de aplicabilitate (RA)* de la marcări, şi respectiv, $M[t\rangle_\Sigma M'$ dacă şi numai dacă este îndeplinită *regula de calcul (RC)* de la marcări (a se vedea definiţia 1.1.7).

În mod similar se consideră extinse la pseudo-marcări celelalte noţiuni de la marcări (i.e., secvenţe de tranziţie, marcări accesibile, ş.a.).

Definiţia 1.1.18 *Un şir infinit de marcări (sau pseudo-marcări) $\{M_n\}_{n\geq 0}$ se spune că* converge *la pseudo-marcarea M, şi se scrie* $\lim_{n\to\infty} M_n = M$*, (sau, pe scurt,* $\lim M_n = M$*), dacă are loc relaţia:*

$$\forall\, n \geq 0, \forall\, s \in S : \begin{cases} M_n(s) = M(s) & , \textit{dacă } M(s) \neq \omega, \\ M_n(s) \geq n & , \textit{altfel.} \end{cases}$$

1.1.4 Extensii ale reţelelor Petri P/T

După cum se cunoaşte, multe dintre sistemele distribuite din lumea reală, de importanţă practică în diverse domenii ştiinţifice, economice şi inginereşti, nu pot fi modelate în mod satisfăcător prin reţele Petri clasice (i.e. reţele P/T). Acest fapt a condus la modificarea acestor tipuri de reţele pentru a corespunde cît mai bine necesităţilor reale. S-au introdus astfel o serie întreagă de *extensii* ale reţelelor Petri clasice, ce pot fi clasificate după două mari direcţii urmate în procesul de modificare:

(1) *modificarea regulii de tranziţie* a reţelelor P/T. O asemenea modificare se poate face asupra regulii de aplicabilitate şi/sau a regulii de calcul a noii marcări. Modificările cele mai frecvent întîlnite, asupra regulii de aplicabilitate, constau de fapt în diverse restricţionări ale acesteia. Mai precis, dacă M este o marcare şi t o tranziţie a unei P/T-reţele, atunci se permite aplicarea tranziţiei t la marcarea M dacă este satisfăcută condiţia clasică de aplicabilitate şi, în plus, dacă este îndeplinită şi o anumită condiţie, de obicei o proprietate exprimabilă în funcţie de elementele reţelei.

Drept exemple de reţele obţinute în această manieră se pot menţiona: reţele Petri cu inhibiţie ([1, 28]), reţele Petri cu priorităţi ([28]), reţele Petri cu resetare ([4]), reţele Petri cu auto-modificare ([102, 101]), reţele Petri sub strategie de maxim ([8, 7]), reţele Petri controlate prin cozi ([9]), reţele Petri controlate prin automate ([11, 12]), reţele Petri condiţionale ([99, 91]), reţele Petri selective ([90, 91]), reţele Petri cu salturi ([46, 95]), etc.

În secţiunea următoare a acestui capitol introductiv voi prezenta pe larg ultima categorie de reţele amintită, *reţelele Petri cu salturi*, ce au fost introduse de colectivul de cercetare de la Facultatea de Informatică din Iaşi, deoarece o bună parte din rezultatele originale ale acestei lucrări se referă la acest tip de reţele.

(2) *modificarea conceptului de marcare* a reţelelor P/T. O asemenea modificare se referă la schimbarea domeniului de valori a marcărilor, adică în loc de funcţii de forma $f : S \to \mathbb{N}$, acestea sunt funcţii $f : S \to A$, cu A o mulţime arbitrară, de exemplu mulţimea cuvintelor peste un alfabet fixat. Această extensie atrage după sine modificarea ponderilor arcelor în conformitate cu tipul elementelor din mulţimea A. Regula de tranziţie a unor asemenea extensii este, de obicei, o transpunere a regulii clasice de tranziţie, cu eventuale modificări ca la direcţia (1).

Ca exemple de reţele obţinute în această manieră se pot menţiona: reţele FIFO ([20]), reţele predicat/eveniment ([80]), reţele predicat/tranziţie ([25, 23]), reţele relaţionale ([80, 81]), reţele colorate ([40, 41]), etc. Mai recent, au apărut o serie de clase de reţele pe două sau mai multe nivele, precum ar fi: *nested Petri nets*, introduse de I. Lomazova ([64, 65]), *object Petri nets*, introduse de R. Valk ([103, 104]), sau *reference nets*, tipul de reţele utilizat de simulatorul RENEW ([136]), toate aceste clase de reţele fiind caracterizate prin faptul că elementele mulţimii A sunt dinamice, fiind modelate la rîndul lor prin reţele Petri.

Alte direcţii de modificare au condus la: reţele Petri temporale ([79, 88, 133, 132]), caracterizate prin introducerea conceptului de *timp* (fie ca durată de producere a unei tranziţii, fie ca interval de timp necesar de activare continuă a unei tranziţii înainte de producerea ei), reţele Petri stochastice ([3, 70, 5]), caracterizate prin faptul că tranziţiile au asociate, în mai multe feluri, *probabilităţi* de producere, ş.a.

Există numeroase monografii ce tratează activitatea de modelare şi analiză a sistemelor folosind reţele Petri şi aplicaţiile acestora în diverse domenii inginereşti, social-economice, academice, ş.a., cum ar fi spre exemplu cărţile [63, 72, 82, 84, 27].

1.2 Reţele Petri cu salturi

Reţelele Petri cu salturi, ce au fost introduse de (Ţiplea & Jucan [95]), sunt o extensie a reţelelor Petri clasice, ce le permite acestora să facă “salturi spontane” dintr-o marcare în alta, asemănător cu λ-tranziţiile de la automate finite.

Această secţiune prezintă noţiunile de bază, notaţiile şi terminologia referitoare la reţele Petri cu salturi. Pentru detalii se pot consulta lucrările [95], [93], [100], [48]; în principiu, am urmat abordarea din (Jucan & Ţiplea [48]).

1.2.1 Definiţii şi notaţii

Definiţia 1.2.1 *O* reţea Petri P/T cu salturi, *pe scurt* P/T-reţea cu salturi, *abreviat JPTN, este un cuplu $\gamma = (\Sigma, R)$, unde Σ este o PTN, iar R este o relaţie binară pe mulţimea marcărilor lui Σ (i.e., $R \subseteq \mathbb{N}^S \times \mathbb{N}^S$), fiind numită* mulţimea salturilor (spontane) *ale lui γ.*

Prin urmare, ca structură, o reţea Petri cu salturi este o reţea P/T clasică împreună cu o mulţime de salturi.

Mulţimea de salturi R a oricărei *JPTN* este cel mult infinit numărabilă, prin urmare este mulţime *recursivă*, adică se poate decide efectiv pentru orice pereche de marcări (M, M') dacă $(M, M') \in R$ sau nu.

Definiţia 1.2.2 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o JPTN. Perechile $(M, M') \in R$ sunt numite* salturi *ale lui γ. Dacă γ are un număr finit de salturi (i.e., R este mulţime finită) atunci se spune că γ este o* reţea Petri cu salturi finite, *abreviat FJPTN. Dacă mulţimea de salturi R are un număr finit de variaţii (i.e., mulţimea $\Delta R = \{M' - M \mid (M, M') \in R\}$ este finită) atunci se spune că γ este o* reţea Petri cu salturi Δ-finite, *abreviat ΔFJPTN.*

Definiţia 1.2.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o JPTN. Reţeaua Σ ce apare în cuplul ce defineşte γ, este numită* reţeaua de bază *a lui γ. Prin* marcare *a reţelei γ se va înţelege orice marcare a reţelei de bază Σ.*

Noţiunea de reţea cu salturi marcată este definită analog ca la P/T-reţele, schimbînd “Σ” cu “Σ, R”.

Definiţia 1.2.4 *Se numeşte* reţea Petri cu salturi marcată, *orice tripletă $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$, unde (Σ, R) este o reţea Petri cu salturi şi M_0 este o marcare a lui Σ, numită* marcarea iniţială *a lui γ. Abrevierile utilizate vor fi mY, unde $Y \in \{$JPTN, FJPTN, ΔFJPTN$\}$.*

În cele ce urmează vom utiliza adeseori termenul de "reţea cu salturi" (JN), pentru a ne referi la o $JPTN$ sau o $mJPTN$ γ, atunci cînd nu va fi necesar să-i specificăm exact tipul (i.e., marcată sau nemarcată).

Reprezentarea grafică a unei reţele cu salturi va fi ca cea a unei reţele clasice, mulţimea de salturi R fiind listată separat.

Definiţia 1.2.5 *Fie γ o reţea cu salturi şi $r = (M, M') \in R$ un salt. Funcţia $\Delta r : S \to \mathbb{Z}$ este definită prin: $\Delta r(s) = M'(s) - M(s)$, $\forall\, s \in S$.*

Pentru descrierea părţii dinamice (i.e., evoluţiei) a unei reţele cu salturi, s-a definit o semantică de tip secvenţial, în care la fiecare pas al evoluţiei reţelei se poate produce o singură tranziţie, precedată şi urmată de zero, unul sau mai multe salturi.

Definiţia 1.2.6 *Evoluţia secvenţială a reţelei cu salturi γ este dată de aşa-numita* regulă de j-tranziţie, *care constă în:*

(RA) regula de j-aplicabilitate*: o tranziţie t este* j-posibilă *la marcarea M în γ, abreviat $M[t\rangle_{\gamma,j}$, dacă există o marcare M_1 astfel încât $MR^*M_1[t\rangle_\Sigma$ (Σ fiind reţeaua de bază a lui γ şi R^* închiderea reflexivă şi tranzitivă a relaţiei R);*

(RC) regula de j-calcul*: dacă $M[t\rangle_{\gamma,j}$, atunci marcarea M' este* j-produsă *prin apariţia tranziţiei t la marcarea M, abreviat $M[t\rangle_{\gamma,j}M'$, dacă există două marcări M_1, M_2 astfel încât $MR^*M_1[t\rangle_\Sigma M_2R^*M'$.*

Notaţia "$[.\rangle_{\gamma,j}$" va fi simplificată la "$[.\rangle_j$" atunci cînd γ este subînţeleasă din context.

Noţiunile de *j-secvenţă de tranziţie* şi *marcare j-accesibilă* sunt definite similar ca cele pentru P/T-reţele, cu observaţia că relaţia $[\lambda\rangle_{\gamma,j}$ este definită astfel:

$$[\lambda\rangle_{\gamma,j} = R^* = \{(M, M') \mid M, M' \in \mathbb{N}^S, MR^*M'\}.$$

Notaţia 1.2.1 Mulţimea tuturor marcărilor j-accesibile *ale unei mJPTN γ, numită şi* mulţimea de j-accesibilitate *a lui γ, este notată prin $RS(\gamma)$ sau prin $[M_0\rangle_{\gamma,j}$ (M_0 fiind marcarea iniţială a lui γ). Iar cu $TS(\gamma)$ se notează* mulţimea tuturor j-secvenţelor de tranziţie *(de la M_0) ale lui γ.*

1.2.2 Proprietăţi şi probleme de decizie

Toate noţiunile de la reţele Petri P/T (i.e., marcare acoperibilă, locaţie mărginită, reţea mărginită, mulţime de locaţii simultan nemărginite, reţea simultan nemărginită, tranziţie pseudo-viabilă, reţea pseudo-viabilă, tranziţie viabilă, reţea viabilă, limbajul generat, pseudo-marcări, etc.) se definesc pentru reţele Petri cu salturi analog ca pentru reţele Petri P/T, prin considerarea noţiunii de *j-accesibilitate* în locul celei de *accesibilitate* de la reţele P/T.

Este posibil ca unele salturi ale unei reţele cu salturi marcate să nu fie niciodată folosite pe parcursul evoluţiei acelei reţele. De aceea, s-a definit noţiunea de reţea R-redusă ([95]), care reprezintă pentru salturi o noţiune similară pseudo-viabilităţii unei tranziţii.

Definiţia 1.2.7 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea cu salturi marcată.*
i) Un salt $(M, M') \in R$ a lui γ este R-redus *dacă $M \neq M'$ şi $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$.*
ii) Reţeaua γ este R-redusă *dacă orice salt al ei este R-redus.*

Toate problemele de decizie de la reţele Petri P/T (i.e., problema accesibilităţii (RP), problema finititudinii mulţimii de accesibilitate (FRSP), problema finititudinii arborelui de accesibilitate (FRTP), problema acoperirii (CP), problema mărginirii (BP), problema nemărginirii simultane (SUbP), problema pseudo-viabilităţii (QLP), problema viabilităţii (LP), problema regularităţii (RegP), etc.) se definesc pentru reţele Petri cu salturi analog ca pentru reţele Petri P/T, prin considerarea noţiunii de *j-accesibilitate* în locul celei de *accesibilitate* de la reţele P/T.

După cum se poate constata cu uşurinţă, pentru reţele Petri cu salturi are loc similara observaţiei 1.1.5 de la reţele Petri P/T. Mai mult, binecunoscutul rezultat de la reţele P/T care spune că problema (CP) este reductibilă la problema (QLP) şi reciproc, se păstrează şi în cazul reţelelor cu salturi:

Propoziţia 1.2.1 *Fie γ o mJPTN oarecare. Au loc afirmaţiile:*
i) $QLP(\gamma, t) \equiv CP(\gamma, t^-)$, pentru orice tranziţie t a reţelei γ ;
ii) $CP(\gamma, M) \equiv QLP(\text{“}\gamma + \{t_M\}\text{”}, t_M)$, pentru orice marcare M a reţelei γ, unde t_M este o nouă tranziţie, asociată lui M, definită prin $t_M^- = t_M^+ = M$, iar “$\gamma + \{t_M\}$” este o nouă reţea, obţinută din γ prin adăugarea tranziţiei t_M (şi a arcelor ponderate aferente ei).

Demonstraţie. i) Această afirmaţie exprimă faptul că problema (QLP) este reductibilă la problema (CP). Ea rezultă din observaţia simplă că o tranziţie t este pseudo-viabilă în γ dacă şi numai dacă există o marcare j-accesibilă M (în γ) astfel încât $M \geq t^-$ (i.e. t este posibilă la M), care are loc dacă şi numai dacă marcarea $M' = t^-$ este acoperibilă în γ.

ii) Această afirmaţie exprimă faptul că problema (CP) este reductibilă la problema (QLP), şi rezultă în felul următor. Din modul de alegere a tranziţiei asociată lui M, se poate constata cu uşurinţă că $RS(\gamma) = RS(\text{“}\gamma + \{t_M\}\text{”})$, deoarece tranziţia t_M nu are nici un efect (producerea ei nu modifică marcarea la care se produce, întrucît $\Delta t = 0$). Prin urmare, o marcare M este acoperibilă în γ dacă şi numai dacă există o marcare M' j-accesibilă (în γ) astfel încât $M' \geq M$, dacă şi numai dacă există o marcare M' j-accesibilă (în "$\gamma + \{t_M\}$") astfel încât $M' \geq t_M^-$, dacă şi numai dacă tranziţia asociată t_M este pseudo-viabilă în reţeaua asociată "$\gamma + \{t_M\}$". □

O parte dintre problemele enumerate mai sus sunt decidabile utilizînd structurile de acoperire pentru reţele Petri cu salturi (voi prezenta mai multe detalii despre aceasta în secţiunea 3.2 din capitolul 3).

De asemenea, pentru reţele Petri cu salturi putem considera *problema reducerii* (RedP) :

a) Date γ o *mJPTN* şi $r = (M, M') \in R$, este saltul r R-redus?
Predicatul asociat este: $RedP(\gamma, r) = true \Leftrightarrow r$ este R-redus.

b) Dată γ o *mJPTN*, este γ R-redusă?
Predicatul asociat este: $RedP'(\gamma) = true \Leftrightarrow \gamma$ este R-redusă.

Observaţia 1.2.1 *Problema accesibilităţii pentru mFJPTN fiind decidabilă ([95]), pentru orice mFJPTN γ se poate construi efectiv (modificînd doar mulţimea de salturi a lui γ) o mFJPTN γ' astfel încât γ' este R-redusă şi are aceeaşi putere de calcul ca şi γ.*

În cele ce urmează, reţelele cu salturi marcate din această lucrare vor fi considerate R-reduse, în toate situaţiile în care nu se specifică explicit contrariul.

1.3 Reţele Petri de nivel înalt

În această secţiune se va face o succintă prezentare a reţelelor Petri de nivel înalt, fără a detalia însă foarte amănunţit definiţia lor formală, notaţiile şi terminologia utilizate în literatura de specialitate despre aceste clase de reţele Petri.

Motivul pentru aceasta constă în faptul că definiţia formală a reţelelor Petri de nivel înalt implică un aparat matematic mult mai laborios decît cel folosit pentru reţelele clasice, iar scopul principal al acestei lucrări, şi contribuţiile originale aduse de ea, se referă la reţelele Petri clasice, şi îndeosebi la cele cu salturi, proporţia rezultatelor originale referitoare la reţelele Petri de nivel înalt, din această lucrare, fiind relativ mică.

După cum am mai spus la începutul acestui capitol, pentru a putea modela sisteme cu o complexitate sporită prin reţele nu prea complicate, deci uşor de studiat, după introducerea reţelelor Petri clasice (C/E-reţele şi P/T-reţele) următorul salt calitativ a fost să se considere că “punctele” din locaţii pot fi obiecte individuale, ce pot fi diferenţiate între ele. În acest scop, fiecărei locaţii i s-a ataşat cîte un tip (sau sort, sau culoare), adică o mulţime fixată de obiecte individuale, locaţiile putând conţine “puncte” doar din tipul asociat. Astfel s-au introdus reţelele Petri de nivel înalt:

- reţele Pr/E (predicat/eveniment), care reprezintă generalizarea reţelelor C/E prin introducerea obiectelor individuale ca “puncte” în condiţii;
- reţele Pr/T (predicat/tranziţie), reţele relaţionale şi reţele colorate, care reprezintă generalizarea reţelelor P/T prin introducerea obiectelor individuale ca “puncte” în locaţii.

Reţelele de nivel înalt se folosesc în prezent pe scară largă în multe domenii cu aplicaţii practice. Principalul motiv al succesului acestor tipuri de reţele îl constituie faptul că acestea au o *reprezentare grafică* intuitivă şi o *semantică* bine-definită, ce permite o *analiză formală* a acestor modele. Pasul de la reţele Petri de nivel scăzut la cele de nivel înalt poate fi comparat cu pasul de la limbajele de asamblare la limbajele de programare moderne, ce au un elaborat concept de *tip de dată*. În reţelele de nivel scăzut există doar un singur fel de “punct”, şi aceasta înseamnă că starea unei locaţii este descrisă de un număr întreg, pe cînd în reţelele de nivel înalt fiecare “punct” poate purta informaţii sau date complexe (care, de exemplu, pot descrie întreaga stare a unui proces sau a unei baze de date).

Reţelele Pr/T, reţelele relaţionale şi, respectiv, reţelele colorate sunt diverse variante de definire a unei aceleaşi categorii de reţele Petri: reţele P/T generalizate în sensul că “punctele” din locaţii sunt obiecte individuale, adică “puncte” ce au diverse culori, dintr-o mulţime fixată de culori, prin care se diferenţiază între ele, locaţiile pot conţine “puncte” de toate culorile, iar fiecare tranziţie este de fapt un “ansamblu” de tranziţii elementare, cîte una pentru fiecare culoare. Faţă de această categorie de reţele, reţelele colorate au în plus restricţia că fiecare locaţie şi tranziţie are asociată o submulţime de culori permise dintre toate culorile reţelei.

Reţelele Pr/T au fost introduse în [25]. O prezentare a lor poate fi găsită şi în [23]. Acest tip de reţele utilizează o reprezentare expresională (arcele sunt etichetate cu expresii construite peste variabile, iar tranziţiile se produc prin interpretări ale variabilelor ce fac ca tranziţia să devină posibilă la marcarea curentă). Reţelele Pr/E utilizează aceeaşi reprezentare ca şi reţelele Pr/T, doar cu restricţia suplimentară că locaţiile nu pot conţine mai multe obiecte individuale identice (la fel cum reţelele C/E sunt o restricţie a reţelelor P/T în sensul că locaţiile nu pot conţine mai multe "puncte").

O prezentare a reţelelor relaţionale poate fi găsită în [80, 81]. Acest tip de reţele utilizează o reprezentare algebrică (arcele sunt etichetate cu multi-relaţii, adică cu funcţii liniare de la multiseturi la multiseturi, iar tranziţiile se produc prin alegerea unei valori a funcţiilor etichetă a arcelor ce fac ca tranziţia să devină posibilă la marcarea curentă).

Reţelele colorate ([40, 41]) au două reprezentări diferite: o reprezentare expresională (ca la reţele Pr/T), numită şi CP-graf, şi o reprezentare algebrică (ca la reţele relaţionale), numită şi CP-matrice. O prezentare detaliată a acestora, însoţită de descrierea tehnicilor de analiză şi a unor exemple de aplicaţii practice ale acestora, poate fi găsită în monografia în trei volume [42, 43, 44]. În plus, există translaţii formale de la o reprezentare la cealaltă şi invers. Mai exact, pentru fiecare reţea CP-matrice există o reţea CP-graf echivalentă cu ea, şi reciproc, pentru fiecare reţea CP-graf există o reţea CP-matrice echivalentă cu ea. Aceasta justifică egalitatea (via relaţia de echivalenţă) a clasei reţelelor CP-matrice cu clasa reţelelor CP-graf.

De asemenea, se poate arăta că pentru fiecare reţea CP-matrice există o reţea relaţională echivalentă cu ea, şi reciproc, pentru fiecare reţea relaţională există o reţea CP-matrice echivalentă cu ea. Ca urmare, clasa reţelelor relaţionale coincide (via relaţia de echivalenţă) cu clasa reţelelor colorate. Similar se arată egalitatea (via relaţia de echivalenţă) a clasei reţelelor Pr/T cu clasa reţelelor CP-graf (deci, cu clasa reţelelor colorate).

Mai mult decît atît, pentru fiecare reţea colorată se poate construi o unică reţea P/T echivalentă cu ea, şi reciproc, pentru fiecare reţea P/T se poate construi o reţea colorată (nu neapărat unică) echivalentă cu ea.

Aceste rezultate de echivalenţă constituie o justificare a faptului binecunoscut că toate clasele de reţele Petri considerate (relaţionale, predicat/tranziţie, colorate CP-graf şi CP-matrice) sunt echivalente între ele şi echivalente cu clasa reţelelor P/T, şi anume echivalente ca *putere de modelare* (adică: orice sistem real ce poate fi modelat printr-o reţea dintr-unul din aceste tipuri, va putea fi modelat şi printr-o reţea din oricare dintre celelalte tipuri) şi ca *evoluţie concurentă* (adică: pentru orice reţea dintr-unul din aceste tipuri, se poate construi o altă reţea din oricare dintre celelalte tipuri, reţea care se comportă exact la fel ca prima, şi aceasta din punctul de vedere al comportării concurente, nu doar al comportării secvenţiale).

Diferenţele dintre aceste tipuri de reţele, pentru care au şi fost definite (astfel încât în funcţie de sistemul practic ce trebuie modelat să se poate alege cel mai convenabil tip de reţea pentru a-l modela şi a-i studia proprietăţile), constau în:

a) modalitatea prin care se atinge uşurinţa de modelare, i.e. conciziunea, simplitatea, claritatea modelului (această modalitate derivă tot din suportul matematic folosit pentru modelare - vezi pct. b));

b) suportul matematic folosit pentru descrierea şi verificarea proprietăţilor acestor modele, i.e. suportul *logic* (limbaj logic, expresii, interpretări, arce etichetate cu expresii, etc., ca în reprezentarea expresională de la reţele Pr/T şi CP-graf) sau cel *algebric* (multiseturi, multirelaţii, aplicaţii liniare pe multiseturi, arce etichetate cu multirelaţii, etc., ca în reprezentarea algebrică de la reţele relaţionale şi CP-matrice).

Reprezentarea expresională, caracteristică reţelelor Pr/T şi CP-graf, implică anumite dificultăţi datorită variabilelor atunci cînd se încearcă construirea unui calcul al invarianţilor pentru aceste reţele. În schimb, reprezentarea algebrică, caracteristică reţelelor relaţionale şi CP-matrice, permite cu uşurinţă extinderea metodei invarianţilor de la reţele P/T la aceste tipuri de reţele. Ca atare, s-a definit calculul cu invarianţi doar pentru reţelele relaţionale şi CP-matrice, dar aceasta nu reprezintă o problemă prea mare, toate cele patru tipuri de reţele fiind echivalente între ele, după cum am discutat mai sus. O prezentare a S-invarianţilor şi T-invarianţilor şi a aplicaţiilor acestora pentru reţele colorate (în forma CP-matrice) poate fi găsită în lucrarea [43], iar pentru reţele relaţionale în [80].

Reprezentarea CP-graf a reţelelor colorate era utilizată pentru descrierea sistemelor în activitatea de modelare a sistemelor reale, iar cea CP-matrice pentru diverse metode de analiză (grafuri de accesibilitate, S- şi T- invarianţi, reguli de reducere, analize de performanţă, ş.a.). Kurt Jensen are meritul de aş fi dat seama că este nevoie de reprezentarea CP-matrice doar pentru analiza cu invarianţi, pentru toate celelalte scopuri fiind suficientă reprezentarea CP-graf (a se vedea monografia [42, 43, 44]). Această observaţie este foarte importantă pentru utilizarea practică a reţelelor colorate: ea înseamnă că reprezentarea CP-matrice şi translaţiile (ce necesită efort matematic) nu mai fac parte din definiţia de bază a reţelelor colorate, ci fac parte din metoda invarianţilor pentru analiză (care oricum necesita deprinderi matematice considerabile).

1.3.1 Reţele Petri colorate. Definiţii şi notaţii

În continuare voi prezenta definiţia formală a reţelelor colorate neierarhice şi a comportamentului lor, aşa cum este dată de Kurt Jensen în lucrarea [42] (în aceeaşi lucrare s-au definit şi reţele colorate ierarhice, care reprezintă, de fapt, reţele compuse, eventual pe mai multe nivele de compunere, din reţele colorate neierarhice).

O reţea colorată neierarhică se defineşte formal ca un n-uplu. Totuşi, trebuie să se înţeleagă faptul că singurul scop pentru aceasta este acela de a da o definiţie matematică corectă şi neambiguă a reţelelor colorate şi a semanticii lor. Orice reţea concretă, creată de un modelator (fie manual, fie utilizînd aplicaţia software `Design/CPN` pentru modelarea şi analiza reţelelor colorate), va fi întotdeauna specificată printr-o *diagramă CPN* sau o *diagramă CPN ierarhică* (vezi [42]).

În principiu (dar nu şi în practică) este uşor de translatat o diagramă CPN într-o reţea colorată n-uplu, şi invers. Forma n-uplu este adecvată atunci cînd dorim să formulăm definiţii generale şi să demonstrăm teoreme valabile pentru toate reţelele colorate. Forma grafică (diagramă CPN) este adecvată atunci cînd dorim să construim o reţea colorată particulară, ce modelează un anumit sistem.

Această abordare este analoagă cu definiţia grafurilor orientate şi a automatelor finite nedeterministe. Formal, acestea sunt definite ca perechi $G = (V, A)$ şi, respectiv, ca 5-uple $A = (S, \Sigma, \delta, s_0, F)$, dar în practică ele sunt reprezentate prin desene conţinînd mulţimi de noduri, arce şi inscripţii.

Pentru a da definiţia abstractă a reţelelor colorate nu este necesar să se fixeze sintaxa concretă în care persoana modelatoare scrie expresiile reţelei, şi de aceea vom presupune doar că avem la dispoziţie o sintaxă, împreună cu o semantică bine-definită, care ne permite să vorbim într-un mod neambiguu despre:

- *elementele unui tip de dată* (sau *sort*), T. Mulţimea tuturor elementelor lui T (i.e., domeniul lui T) este denotată prin însuşi numele tipului T.
- *tipul unei variabile*, v, denotat prin $Type(v)$.
- *tipul unei expresii*, $expr$, denotat prin $Type(expr)$.
- *mulţimea variabilelor ce apar într-o expresie*, $expr$, denotată prin $Var(expr)$.
- o *interpretare*, b, a unei mulţimi de variabile V, ce asociază fiecărei variabile $v \in V$ un element $b(v) \in Type(v)$.

- *valoarea obţinută prin evaluarea unei expresii, $expr$, intr-o interpretare,* b, denotată prin $expr <b>$. Este necesar ca $Var(expr)$ să fie o submulţime a mulţimii variabilelor interpretării b, iar evaluarea se face prin substituţia fiecărei variabile $v \in Var(expr)$ cu valoarea $b(v) \in Type(v)$ determinată de acea interpretare.

Aşadar, sintaxa şi semantica avute la dispoziţie specifică o algebră universală tipizată (i.e., o signatură Σ multisortată şi o algebră multisortată peste signatura Σ), împreună cu mulţimea termilor (i.e. expresiilor) construiţi peste această algebră utilizînd o mulţime de variabile tipizate, precum şi un limbaj logic cu predicate de ordinul întîi cu egalitate multisortat (construit peste signatura Σ) utilizat pentru evaluarea expresiilor.

O expresie *fără* variabile este numită *expresie închisă.* Ea poate fi evaluată în orice interpretare, iar rezultatul este aceeaşi valoare, indiferent de interpretare, valoare pe care de obicei o vom denota prin însăşi expresia respectivă (adică vom scrie pur şi simplu "*expr*" în loc de "$expr <b>$").

Acum suntem gata să dăm definiţia reţelelor colorate neierarhice. Vom utiliza $\mathbb{B}$ pentru a denota tipul boolean (conţinînd elementele $\{\texttt{false}, \texttt{true}\}$, şi avînd operaţiile standard din logica propoziţională), şi atunci cînd V este o mulţime de variabile, vom utiliza $Type(V)$ pentru a denota mulţimea tipurilor $\{Type(v) \mid v \in V\}$. Anumite explicaţii suplimentare pentru părţile individuale ale definiţiei sunt date imediat după definiţie, şi este recomandată citirea acestora în paralel cu definiţia.

Definiţia 1.3.1 *Prin* reţea colorată neierarhică*, pe scurt CP-reţea, vom înţelege orice 9-uplu* $CPN = (S, T, A, N, \Sigma, C, G, E, I)$ *ce satisface cerinţele următoare:*

(i) S *este o mulţime finită de* locaţii.

(ii) T *este o mulţime finită de* tranziţii.

(iii) A *este o mulţime finită de* arce*, astfel încât :* $S \cap T = S \cap A = T \cap A = \emptyset$.

(iv) $N : A \to S \times T \cup T \times S$ *este funcţia* nod*, ce descrie capetele unui arc.*

(v) Σ *este o mulţime finită de tipuri nevide, numite* mulţimi de culori.

(vi) $C : S \to \Sigma$ *este funcţia* culoare.

(vii) $G : T \to \{expr \mid expr \text{ este expresie}\}$ *este funcţia* gardă*, ce satisface condiţia:*

$$\forall\, t \in T : \; Type(G(t)) = \mathbb{B} \;\wedge\; Type(Var(G(t))) \subseteq \Sigma \;.$$

(viii) $E : A \to \{expr \mid expr \text{ este expresie}\}$ *este funcţia* expresie de arc, *ce satisface condiţia:*

$$\forall\, a \in A : \; Type(E(a)) = C(s(a))_{MS} \;\wedge\; Type(Var(E(a))) \subseteq \Sigma \;,$$

unde $s(a)$ *este locaţia din perechea* $N(a)$.

(ix) $I : S \to \{expr \mid expr \text{ este expresie închisă}\}$ *este funcţia* de iniţializare, *ce satisface condiţia:*

$$\forall\, s \in S : \; Type(I(s)) = C(s)_{MS} \;.$$

Observaţia 1.3.1 *Cîteva explicaţii suplimentare referitoare la definiţia anterioară:*

(i)+(ii)+(iii) Structura reţelei (i.e., locaţiile, tranziţiile şi arcele) este descrisă prin intermediul a trei mulţimi S, T *şi* A, *care se cere să fie finite şi disjuncte două cîte două. În contrast cu reţelele Petri clasice, aici permitem ca structura reţelei să fie vidă, din motive practice (aceasta permite utilizatorului să definească şi să verifice sintactic o mulţime de mulţimi de culori, fără a fi nevoit să inventeze o structură de reţea banală).*

(iv) Funcţia nod N *asociază fiecărui arc o pereche ordonată ce descrie capetele arcului, prima componentă fiind capătul sursă, iar a doua capătul destinaţie. În contrast cu reţelele Petri clasice, aici permitem ca, tot din motive practice, să avem mai multe arce între o aceeaşi pereche ordonată de noduri (de aceea* A *este definit ca o mulţime separată şi nu ca o submulţime a lui* $S \times T \cup T \times S$*). Evident, este uşor de a combina asemenea arce multiple într-un singur arc prin adunarea expresiilor de arc corespunzătoare. De asemenea, tot din motive practice, permitem noduri izolate.*

(v) Mulţimea de mulţimi de culori determină tipurile, operaţiile şi funcţiile ce pot fi utilizate în inscripţiile reţelei (i.e., expresii de arc, gărzi, expresii de iniţializare, mulţimi de culori, etc.). Dacă se doreşte, mulţimile de culori (şi operaţiile şi funcţiile asociate) pot fi definite prin intermediul Σ*-algebrelor multisortate (ca în teoria tipurilor de date abstracte). Lucrăm cu ipoteza că fiecare mulţime de culori este nevidă.*

(vi) Funcţia culoare C *asociază fiecărei locaţii,* s, *o mulţime de culori* $C(s)$*. Intuitiv, aceasta înseamnă că fiecare "punct" din locaţia* s *trebuie să aibă o culoare ce aparţine tipului* $C(s)$.

(vii) Funcţia gardă G *asociază fiecărei tranziţii,* t, *o expresie de tip boolean* $G(t)$, *i.e. un predicat logic, numit* garda asociată tranziţiei. *În plus, toate variabilele din expresia* $G(t)$ *trebuie să aibă tipuri din mulţimea de tipuri* Σ. *Prin convenţie, dacă garda este expresia închisă* `true`, *atunci ea este omisă în reprezentarea grafică a reţelei.*

(viii) Funcţia expresie de arc *E asociază fiecărui arc, a, o expresie $E(a)$ avînd tipul $C(s(a))_{MS}$. Aceasta înseamnă că fiecare evaluare a expresiei de arc trebuie să producă un multiset peste mulţimea de culori ataşată locaţiei corespunzătoare acelui arc. Prin convenţie, permitem ca expresia de arc să fie şi de tip $C(s(a))$, caz în care o considerăm ca o prescurtare pentru* 1\`*(expr) (adică un multiset cu un singur element), sau chiar să lipsească în reprezentarea grafică a reţelei, caz în care o considerăm ca o prescurtare pentru* `empty`.

(ix) Funcţia de iniţializare *I asociază fiecărei locaţii, s, o expresie închisă $I(s)$ avînd tipul $C(s)_{MS}$, i.e. un multiset peste mulţimea de culori ataşată locaţiei. Analog ca la (viii), ca prescurtare, vom permite ca o expresie de iniţializare să aibă tipul $C(s)$ sau să lipsească.*

Notaţia 1.3.1 *Vom utiliza $X = S \cup T$ pentru a denota mulţimea tuturor* nodurilor *(i.e. locaţii şi tranziţii). În plus, definim o serie de funcţii ce descriu relaţiile dintre elementele vecine ale structurii reţelei (numele funcţiei începe cu majusculă atunci cînd valoarea ei este o mulţime de elemente; uneori folosim acelaşi nume pentru mai multe funcţii, dar din argumentele apelului va fi întotdeauna clar cu ce funcţie lucrăm), şi anume:*

- *$s : A \to S$ asociază fiecărui arc, a, locaţia din perechea $N(a)$.*
- *$t : A \to T$ asociază fiecărui arc, a, tranziţia din perechea $N(a)$.*
- *$o : A \to X$ asociază fiecărui arc, a, originea (sursa) lui a, i.e. prima componentă a perechii $N(a)$.*
- *$d : A \to X$ asociază fiecărui arc, a, destinaţia lui a, i.e. a doua componentă a perechii $N(a)$.*
- *$A : S \times T \cup T \times S \to \mathcal{P}(A)$ asociază fiecărei perechi ordonate de noduri, (x_1, x_2), mulţimea arcelor ce le conectează, i.e.*
  $A(x_1, x_2) = \{a \in A \mid N(a) = (x_1, x_2)\}$.
- *$A : X \to \mathcal{P}(A)$ asociază fiecărui nod, x, mulţimea arcelor care îl înconjoară, i.e.*
  $A(x) = \{a \in A \mid \exists\, x' \in X : N(a) = (x, x') \vee N(a) = (x', x)\}$.
- *$In : X \to \mathcal{P}(X)$ asociază fiecărui nod, x, mulţimea nodurilor de intrare, i.e.*
  $In(x) = {}^\bullet x = \{x' \in X \mid \exists\, a \in A : N(a) = (x', x)\}$.
- *$Out : X \to \mathcal{P}(X)$ asociază fiecărui nod, x, mulţimea nodurilor de ieşire, i.e.*
  $Out(x) = x^\bullet = \{x' \in X \mid \exists\, a \in A : N(a) = (x, x')\}$.

- $X : X \to \mathcal{P}(X)$ *asociază fiecărui nod, x, mulţimea nodurilor care îl înconjoară, i.e.*
  $X(x) = {}^{\bullet}x \cup x^{\bullet} = \{x' \in X \mid \exists\, a \in A : N(a) = (x', x) \vee N(a) = (x, x')\}.$

Toate funcţiile de mai sus pot fi extinse, în maniera uzuală, pentru a primi mulţimi ca argument (atunci ele returnează mulţimi şi de aceea vom scrie numele funcţiilor cu majuscule).

Avînd definită structura CP-reţelelor, putem acum să considerăm comportamentul lor. Mai întîi, introducem următoarele notaţii:

Notaţia 1.3.2 *(i) Notăm cu $Var(t)$ mulţimea* variabilelor *tranziţiei t, i.e. variabilele ce apar în expresia gardă sau în expresiile arcelor înconjurătoare:*

$$\forall\, t \in T : Var(t) = \{v \mid v \in Var(G(t)) \;\vee\; \exists\, a \in A(t) : v \in Var(E(a))\}.$$

(ii) Notăm cu $E(x_1, x_2)$ expresia *asociată lui (x_1, x_2), i.e. suma expresiilor arcelor ce conectează perechea de noduri (x_1, x_2):*

$$\forall\, (x_1, x_2) \in S \times T \cup T \times S : \quad E(x_1, x_2) = \sum_{a \in A(x_1, x_2)} E(a)$$

(suma denotă adunarea expresiilor şi este bine-definită deoarece toate expresiile din sumă au ca tip un acelaşi multiset).
Să remarcăm că $A(x_1, x_2) = \emptyset$ implică $E(x_1, x_2) = \emptyset$ (unde ultimul $\emptyset$ denotă expresia închisă care se evaluează la multisetul vid).

În continuare vom defini noţiunea de *interpretare a unei tranziţii.* Intuitiv, o interpretare a unei tranziţii t este o substituţie care înlocuieşte fiecare variabilă a lui t cu o culoare de tipul corespunzător şi astfel încât garda se evaluează la valoarea `true`.

Definiţia 1.3.2 *O* interpretare a unei tranziţii t *este o funcţie b definită pe mulţimea $Var(t)$, astfel încât :*

(i) $\forall\, v \in Var(t) : \; b(v) \in Type(v).$

(ii) $G(t) <b> =$ `true`.

Vom nota cu $B(t)$ mulţimea tuturor interpretărilor lui t.

Dacă $Var(t) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, interpretările lui t le vom scrie de obicei sub forma $< v_1 = c_1, v_2 = c_2, \ldots, v_n = c_n >$, ordinea variabilelor neavînd nici o importanţă. Şi acum vom defini noţiunile de punct colorat, tranziţie interpretată, marcare şi pas.

Definiţia 1.3.3 *(i) Prin* punct colorat *vom înţelege orice pereche ordonată de forma (s, c), cu $s \in S$ şi $c \in C(s)$. Mulţimea tuturor punctelor colorate este notată cu TE.*

Prin marcare *vom înţelege orice multiset peste TE. Mulţimea tuturor marcărilor este notată cu $\mathbb{M}$, i.e. $\mathbb{M} = TE_{MS}$.*

Marcarea iniţială M_0 *este marcarea obţinută prin evaluarea expresiilor de iniţializare:*

$$\forall\, (s, c) \in TE: \quad M_0(s, c) = (I(s))(c).$$

(ii) Prin tranziţie interpretată *vom înţelege orice pereche ordonată de forma (t, b), cu $t \in T$ şi $b \in B(t)$. Mulţimea tuturor tranziţiilor interpretate este notată cu BE.*

Prin pas *vom înţelege orice multiset nevid şi finit peste BE. Mulţimea tuturor paşilor este notată cu $\mathbb{Y}$, i.e. $\mathbb{Y} = \{Y \in BE_{MS} \mid 0 < |Y| < \infty\}$.*

Notaţia 1.3.3 *Vom nota cu $BE(t) = \{t\} \times B(t)$ mulţimea tuturor tranziţiilor interpretate corespunzătoare tranziţiei $t \in T$, şi cu $TE(s) = \{s\} \times C(s)$ mulţimea tuturor punctelor colorate corespunzătoare locaţiei $s \in S$.*

Observaţia 1.3.2 *Fiecare marcare $M \in TE_{MS}$ determină o unică funcţie $\bar{M}$ definită pe S astfel încât $\bar{M}(s) \in C(s)_{MS}, \forall\, s \in S$, prin:*

$$\forall\, s \in S, \forall\, c \in C(s): \ (\bar{M}(s))(c) = M(s, c).$$

Şi reciproc, orice funcţie $\bar{M}$ definită pe S astfel încât $\bar{M}(s) \in C(s)_{MS}$, $\forall\, s \in S$, determină o unică marcare M, definită prin:

$$\forall\, (s, c) \in TE: \ M(s, c) = (\bar{M}(s))(c).$$

Această corespondenţă biunivocă ne permite să reprezentăm adeseori marcările ca funcţii definite pe S.

Analog, există o corespondenţă biunivocă între un pas Y şi o funcţie $\bar{Y}$ definită pe T astfel încât $\bar{Y}(t) \in B(t)_{MS}$ este finit pentru orice $t \in T$ şi nevid pentru cel puţin un $t \in T$. De aceea, vom reprezenta adesea paşii ca funcţii definite pe T.

Notaţia 1.3.4 *Fie CPN o CP-reţea, şi $Y \in \mathbb{Y}$ un pas. Multiseturile (funcţiile) $Y^- : TE \to \mathbb{N}$ şi $Y^+ : TE \to \mathbb{N}$, şi funcţia $\Delta Y : TE \to \mathbb{Z}$ sunt definite prin:*

$$1) \quad Y^-(s, c) = \Bigg(\sum_{(t,b) \in Y} E(s, t) <b> \Bigg)(c) \quad ;$$

$$2)\ \ Y^+(s,c) = \Big(\sum_{(t,b)\in Y} E(t,s) <b>\Big)(c) \ \ ;$$

$$3)\ \ \Delta Y(s,c) = Y^+(s,c) - Y^-(s,c) \ \ ,$$

pentru orice $(s,c) \in TE$.

Conform observaţiei anterioare, cele trei funcţii de mai sus pot fi privite şi ca funcţii definite pe S *astfel încât* $Y^-(s), Y^+(s) \in C(s)_{MS}, \forall\, s \in S$, *şi* $\Delta Y(s) \in \{f \mid f : C(s) \to \mathbb{Z}\}, \forall\, s \in S$.

În sfirşit, putem da acum definiţia formală a comportamentului (evoluţiei) unei reţele colorate:

Definiţia 1.3.4 *Evoluţia CP-reţelei* CPN *este dată de* regula de tranziţie, *care constă în:*

(RA) regula de aplicabilitate*: un pas* Y *este* posibil *la marcarea* M *(în* CPN*), abreviat* $M[Y\rangle_{CPN}$ *, dacă şi numai dacă*

$$\forall\, s \in S:\ Y^-(s) \le M(s)\ ;$$

(RC) regula de calcul*: dacă* $M[Y\rangle_{CPN}$*, atunci* Y *poate* apare la marcarea M *producînd o nouă marcare* M'*, abreviat* $M[Y\rangle_{CPN}M'$*, definită prin:*

$$\forall\, s \in S:\ M'(s) = \Big(M(s) - Y^-(s)\Big) + Y^+(s)\ .$$

Constatăm că, în acest fel, pentru orice pas Y al CP-reţelei CPN am definit o relaţie binară pe TE_{MS}, notată $[Y\rangle_{CPN}$, prin:

$$M[Y\rangle_{CPN}M' \ \ \Leftrightarrow\ \ Y^- \le M \ \text{ şi }\ M' = M + \Delta Y.$$

Notaţia "$[.\rangle_{CPN}$" va fi simplificată la "$[.\rangle$" ori de cîte ori CP-reţeaua CPN va fi subînţeleasă din context.

Definiţia 1.3.5 *Fie* Y *un pas posibil la marcarea* M*. Dacă* $(t,b) \in Y$*, spunem că* t *este* posibilă *la* M *cu interpretarea* b*. De asemenea, mai spunem că* (t,b) *este* posibilă *la* M*, şi că tranziţia* t *este* posibilă *la* M*. Dacă* $(t_1,b_1),(t_2,b_2) \in Y$ *şi* $(t_1,b_1) \ne (t_2,b_2)$*, spunem că* (t_1,b_1) *şi* (t_2,b_2) *sunt* posibile concurent (simultan) *la* M*, şi, de asemenea, că* t_1 *şi* t_2 *sunt* posibile concurent *la* M*. Dacă* $Y(t,b) \ge 2$*, spunem că* (t,b) *este* posibilă concurent cu ea însăşi *la* M*. Iar dacă* $|Y(t)| \ge 2$*, spunem că* t *este* posibilă concurent cu ea însăşi *la* M*.*

Definiţia 1.3.6 *O* secvenţă de apariţie finită *este o secvenţă de marcări şi paşi de forma*

$$M_1[Y_1\rangle M_2[Y_2\rangle M_3 \ldots M_n[Y_n\rangle M_{n+1}$$

astfel încât $n \in \mathbb{N}$, *şi* $M_i[Y_i\rangle M_{i+1}$ *pentru orice* $1 \leq i \leq n$. M_1 *este numită* marcarea de început, M_2 *este numită* marcarea de sfîrşit, *iar numărul n este numit* lungimea *secvenţei.*

Analog, o secvenţă de apariţie infinită *este o secvenţă de marcări şi paşi de forma*

$$M_1[Y_1\rangle M_2[Y_2\rangle M_3 \ldots$$

astfel încât $M_i[Y_i\rangle M_{i+1}$ *pentru orice* $i \geq 1$. M_1 *este numită* marcarea de început *a secvenţei, care se spune că are* lungime infinită.

Mulţimea tuturor secvenţelor de apariţie finite o notăm cu OSF, *iar pe cea a tuturor secvenţelor de apariţie infinite cu* OSI. *În plus, vom nota cu* $OS = OSF \cup OSI$ *mulţimea tuturor secvenţelor de apariţie.*

Definiţia 1.3.7 *O marcare* M' *este* accesibilă *de la marcarea* M *în CP-reţeaua* CPN *dacă şi numai dacă există o secvenţă de apariţie finită avînd pe* M *ca marcare de început şi pe* M' *ca marcare de sfîrşit. Mulţimea tuturor marcărilor accesibile de la* M *este notată cu* $[M\rangle_{CPN}$, *sau cu* $RS(CPN, M)$.

În cazul în care $M = M_0$, $RS(CPN, M_0)$ *se prescurtează cu* $RS(CPN)$ *(sau* $[M_0\rangle_{CPN}$*) şi se numeşte* mulţimea de accesibilitate a CP-reţelei CPN.

Notaţia 1.3.5 *Notăm cu* $BE(M)$ *mulţimea tranziţiilor interpretate (i.e., a paşilor individuali) care sunt posibile la marcarea M în reţeaua CPN, i.e.*

$$BE(M) = \{(t, b) \in BE \mid M[(t, b)\rangle_{CPN}\} = \{Y \in \mathbb{Y} \mid M[Y\rangle_{CPN} \wedge |Y| = 1\}.$$

Definiţia 1.3.8 *Marcarea* M *este* acoperibilă *în CP-reţeaua* CPN *dacă şi numai dacă există o marcare accesibilă* $M' \in [M_0\rangle_{CPN}$, *astfel încât* $M \leq M'$.

Pentru a putea defini structuri de acoperire pentru reţele colorate, vom considera, similar ca la reţele P/T, extensia $\mathbb{N}_\omega$ a mulţimii numerelor întregi nenegative $\mathbb{N}$, şi vom lucra cu marcări ce pot avea ω-componente.

Notaţia 1.3.6 *Fie* CPN *o CP-reţea. Notăm cu* $\mathbb{M}_\omega = \{M \mid M : TE \to \mathbb{N}_\omega\}$ *mulţimea marcărilor ce pot avea şi* ω*-componente, pe care le vom mai numi şi* pseudo-marcări.

Pseudo-marcările le vom identifica uneori prin vectori $|TE|$-dimensionali peste $\mathbb{N}_\omega$, la fel ca la marcări. Regula de tranziţie de la marcări o considerăm extinsă la pseudo-marcări, adică, date Y un pas şi M, M' două pseudo-marcări, spunem că $M[Y\rangle_{CPN}$ dacă şi numai dacă este îndeplinită regula de aplicabilitate (RA) de la marcări, şi respectiv, $M[Y\rangle_{CPN}M'$ dacă şi numai dacă este îndeplinită regula de calcul (RC) de la marcări. În mod similar se consideră extinse la pseudo-marcări celelalte noţiuni de la marcări (i.e. secvenţe de apariţie, marcări accesibile, ş.a.).

După cum am mai amintit, reţelele colorate sunt echivalente ca *putere de modelare* cu reţelele P/T. Mai exact, pentru fiecare reţea colorată neierarhică se poate construi o unică reţea P/T echivalentă cu ea, i.e. o reţea P/T care are acelaşi comportament ca şi reţeaua colorată, şi reciproc, pentru fiecare reţea P/T se poate construi o reţea colorată neierarhică (nu neapărat unică) echivalentă cu ea. Existenţa unei reţele P/T echivalente este extrem de folositoare, întrucît ne spune cum să generalizăm conceptele de bază şi metodele de analiză de la reţele P/T la reţele colorate neierarhice. Pur şi simplu, definim aceste concepte într-o asemenea manieră încît o CP-reţea are o proprietate dată dacă şi numai dacă reţeaua P/T echivalentă are proprietatea corespondentă. Important de reţinut este faptul că nu vom face niciodată această translaţie pentru o CP-reţea particulară. Atunci cînd modelăm un sistem utilizăm direct CP-reţele, fără a construi echivalenta P/T, şi similar procedăm atunci cînd analizăm proprietăţile reţelei.

Construcţia echivalentei P/T a unei CP-reţele se face în felul următor:

Definiţia 1.3.9 *Fie $CPN = (S, T, A, N, \Sigma, C, G, E, I)$ o reţea colorată neierarhică dată. Definim* reţeaua P/T echivalentă *cu ea ca fiind P/T-reţeaua $PTN_{CPN} = (S', T', F', W', M'_0)$, unde:*

(i) $S' = TE$.

(ii) $T' = BE$.

(iii) $F' = \{((s,c),(t,b)) \in S' \times T' \mid (E(s,t) <b>)(c) \neq 0\} \cup$
$\cup\ \{((t,b),(s,c)) \in T' \times S' \mid (E(t,s) <b>)(c) \neq 0\}$.

(iv) $\forall\,((s,c),(t,b)) \in S' \times T' : \;\; W'((s,c),(t,b)) = (E(s,t) <b>)(c)$
$\forall\,((t,b),(s,c)) \in T' \times S' : \;\; W'((t,b),(s,c)) = (E(t,s) <b>)(c)$

(v) $\forall\,(s,c) \in S' : \; M'_0(s,c) = (I(s))(c)$.

Observaţia 1.3.3 *Reţeaua P/T echivalentă definită mai sus este, eventual, infinită, i.e. poate avea mulţimi infinite de locaţii şi de tranziţii, deci nu respectă întru totul definiţia uzuală a reţelor P/T, pe care am dat-o în secţiunea 1.1 (definiţie ce impune restricţia ca mulţimile de locaţii şi de tranziţii să fie finite).*

Teorema 1.3.1 *Orice reţea colorată neierarhică, CPN, are exact aceleaşi mulţime de marcări, marcare iniţială, mulţime de paşi şi secvenţe de apariţie ca şi P/T echivalenta sa, PTN_{CPN}, şi prin urmare cele două reţele sunt echivalente comportamental. Mai exact, are loc:*
(i) $M \in \mathbb{M} \Leftrightarrow M$ *este marcare a reţelei* PTN_{CPN}.
(ii) $M_0 = M'_0$.
(iii) $Y \in \mathbb{Y} \Leftrightarrow Y$ *este pas al reţelei* PTN_{CPN}.
(iv) $\forall M_1, M_2 \in \mathbb{M}, \forall Y \in \mathbb{Y} : \ M_1[Y\rangle_{CPN} M_2 \Leftrightarrow M_1[Y\rangle_{PTN_{CPN}} M_2$.

Demonstraţie. Demonstraţia este banală (poate fi găsită în [42]). □

Translaţia în sens invers, de la o reţea P/T, $PTN = (S, T, F, W, M_0)$, la o CP-reţea echivalentă, $CPN' = (S', T', A', N', \Sigma', C', G', E', I')$, se face în felul următor: se aleg o partiţie $\mathbf{P}_S$ a mulţimii locaţiilor S şi o partiţie $\mathbf{P}_T$ a mulţimii tranziţiilor T, după care, pentru CP-reţeaua CPN', se ia ca mulţime de tipuri $\Sigma' = \mathbf{P}_S \cup \ \mathbf{P}_T$, ca mulţime de locaţii $S' = \mathbf{P}_S$ şi ca mulţime de tranziţii $T' = \mathbf{P}_T$, iar ca funcţie de culoare se ia $C(s') = s', \forall s' \in S'$. Intuitiv, toate locaţiile s ale unei componente $S_i \in \mathbf{P}_S$ sunt "strînse" într-o singură locaţie $S_i \in S'$ în reţeaua CPN', dar fiecare are ataşată drept culoare pe ea însăşi s, putînd face astfel distincţie între "punctele" provenite din vechile locaţii din reţeaua PTN "strînse" acum într-o singură locaţie în reţeaua CPN'. Similar, tranziţiile unei componente $T_i \in \mathbf{P}_T$ sunt "strînse" într-o singură tranziţie $T_i \in T'$ în reţeaua CPN', avînd ataşată garda `true`, iar arcele şi marcarea iniţială se etichetează cu expresiile corespunzătoare acestor "strîngeri" de locaţii şi de tranziţii.

Pentru detalii suplimentare despre definiţia formală a celorlalte componente din n-uplul CPN', şi demonstraţia rezultatului de echivalenţă, recomandăm consultarea lucrării [42]. Ca o observaţie, se cuvine menţionat faptul că translaţia în sens invers nu mai este unică, ci pentru fiecare pereche $(\mathbf{P}_S, \mathbf{P}_T)$ de partiţii posibile obţinem o CP-reţea $CPN' = CPN_{(PTN, \mathbf{P}_S, \mathbf{P}_T)}$.

În legătură cu proprietăţile reţelelor colorate şi problemele de decizie asociate lor, precum şi referitor la metodele de analiză formală existente pentru reţelele colorate, recomandăm consultarea lucrării [42] (se mai poate consulta şi sinteza pe care am realizat-o în raportul tehnic [119]).

În continuare, cîteva cuvinte despre:

Reţele colorate ierarhice

Ideea de bază a introducerii reţelelor colorate ierarhice a fost aceea de a permite persoanei modelatoare a unui sistem să construiască un model complex prin combinarea unei serii de CP-reţele mici într-o singură reţea mare.

Această idee este similară cu situaţia în care un programator construieşte un program complex dintr-o mulţime de module şi subprograme.

Astfel, o *reţea colorată ierarhică* se obţine prin compunerea, folosind nişte *constructori ierarhici*, a mai multor CP-reţele neierarhice (sau chiar şi a unor reţele ierarhice, deci se poate face o compunere pe mai multe “nivele” de reţele).

Noţiunea de reţea colorată ierarhică a fost introdusă prima dată în lucrarea [35], care descrie cinci tipuri de constructori ierarhici, cunoscuţi sub denumirea de *substituţie de tranziţii*, *substituţie de locaţii*, *apel de tranziţii*, *fuziune de tranziţii*, şi *fuziune de locaţii*.

Aplicaţia software `Design/CPN` suportă constructorii *substituţie de tranziţii* şi *fuziune de locaţii*, şi ca atare s-a lucrat mult cu aceşti constructori, care s-au dovedit a fi foarte folositori, fără a cauza nici o dificultate de ordin teoretic. Experienţele făcute cu ceilalţi trei constructori au scos la iveală unele probleme de ordin teoretic şi practic.

Din aceste motive, s-au păstrat doar cei doi constructori amintiţi mai sus in definiţia formală a reţelelor colorate ierarhice, care poate fi găsită în lucrarea [42].

Demn de amintit este faptul că legătura dintre reţelele colorate ierarhice şi cele neierarhice este similară cu legătura dintre reţelele colorate neierarhice şi reţelele P/T. Mai exact, pentru fiecare reţea colorată ierarhică se poate construi o unică reţea colorată neierarhică echivalentă cu ea, şi reciproc, pentru fiecare reţea colorată neierarhică se poate construi o reţea colorată ierarhică (nu neapărat unică) echivalentă cu ea (vezi [42]).

Aceasta justifică faptul că cele trei clase de reţele (P/T, colorate neierarhice şi colorate ierarhice) sunt echivalente, din punct de vedere teoretic, şi anume echivalente ca *putere de modelare* (adică: orice sistem real ce poate fi modelat printr-o reţea dintr-unul din aceste tipuri, va putea fi modelat şi printr-o reţea din oricare dintre celelalte tipuri) şi ca *evoluţie concurentă* (adică: pentru orice reţea dintr-unul din aceste tipuri, se poate construi o altă reţea din oricare dintre celelalte tipuri, reţea care se comportă exact la fel ca prima, şi aceasta din punctul de vedere al comportării concurente, nu doar al comportării secvenţiale).

Însă, din punct de vedere practic, cele trei clase de reţele au proprietăţi foarte diferite. Pentru a putea lucra cu modele pentru sisteme foarte mari (complexe), avem nevoie de a dezvolta concepte de structurare şi abstracţie puternice. Primul pas esenţial în această direcţie a fost înlocuirea reţelelor de nivel scăzut cu cele de nivel înalt. Al doilea pas a fost introducerea reţelelor ierarhice. Prin analogie cu limbajele de programare, primul pas poate fi comparat cu introducerea tipurilor de date, ceea ce a permis programatorilor să lucreze cu date structurate în loc de biţi. Al doilea pas poate fi comparat cu apariţia limbajelor de programare cu subrutine şi module, ceea ce a permis programatorilor să construiască programe din subprograme şi module componente.

Capitolul 2

Metode de analiză formală a reţelelor Petri

În acest capitol se va face o scurtă trecere în revistă a metodelor de analiză formală pentru reţele Petri, existente în prezent, urmînd ca în capitolele următoare să se detalieze cîteva dintre acestea.

Cea mai directă manieră de analiză este *simularea*, care este analogul testării şi execuţiei unui program. Un bun simulator de reţele Petri este analog cu un bun program depanator de programe. El asistă utilizatorul în examinarea atentă a *unor* posibile secvenţe de apariţie.

O listă a simulatoarelor disponibile pentru diverse tipuri de reţele Petri poate fi consultată pe portalul dedicat reţelelor Petri ([135]). Astfel, spre exemplu, pentru reţele Petri colorate este disponibil simulatorul `Design/CPN`, care are şi facilităţi de analiză formală (structuri de accesibilitate reduse şi invarianţi). Un alt simulator este şi aplicaţia `RENEW` ([136]), dedicată reţelelor Petri pe mai multe nivele (o nouă clasă de reţele Petri, în care punctele din locaţiile reţelei pot avea un comportament dinamic, fiind modelate tot prin reţele).

Simularea este foarte folositoare pentru înţelegerea şi depanarea unei reţele Petri, mai ales în timpul proiectării şi analizei de început a unui sistem foarte mare. Totuşi, este evident că, doar prin simulare, este imposibil de obţinut o demonstraţie completă a proprietăţilor dinamice ale reţelelor Petri (decît dacă reţelele sau proprietăţile sunt triviale). De aceea este important să avem la dispoziţie şi unele metode de analiză formală (i.e., metode bazate pe tehnici de demonstraţie matematică).

În continuare se vor prezenta pe scurt principalele metode de analiză formală a reţelelor Petri.

2.1 Grafuri de apariţie

Ideea de bază a *grafurilor de apariţie* este de a construi un graf ce conţine cîte un nod pentru fiecare marcare accesibilă şi cîte un arc pentru fiecare apariţie a unei tranziţii.

Un asemenea graf mai este întîlnit în literatura de specialitate despre reţele Petri şi sub denumirea de *graf de accesibilitate*, fiind definit pentru prima dată în lucrarea (Karp & Miller [51]) pentru sisteme aditive de vectori, un model ce este echivalent cu reţelele Petri P/T. În (Jensen [42]) s-a preferat denumirea de *graf de apariţie* deoarece această denumire surprinde faptul că acest graf conţine informaţii nu doar despre marcările accesibile, ci şi despre apariţiile tranziţiilor.

În grafurile de apariţie pentru reţele Petri se omit arcele corespunzătoare paşilor formaţi din mai mult de o tranziţie, fără ca prin aceasta să se piardă prea multe informaţii.

Cu toate acestea, grafurile de apariţie pot deveni foate mari, chiar şi pentru reţele mici, ceea ce face ca procesul de construcţie şi investigaţie a acestora să fie dificil şi posibil supus erorilor.

Din acest motiv, este clar că sunt necesare tehnici prin care să se poată construi grafuri de apariţie *reduse*, fără a pierde prea multă informaţie.

În continuare se vor prezenta cîteva din tehnicile dezvoltate pentru a obţine o asemenea reducere. Demn de reţinut este faptul că, pentru toate aceste tehnici, graful de apariţie redus poate fi construit direct, fără a construi mai întîi graful de apariţie complet.

2.1.1 Marcări simetrice

Această metodă de reducere exploatează simetriile care există adesea în sistemele modelate prin reţele de nivel înalt, colorate, dar ea se poate aplica şi pentru reţelele clasice. Aceste simetrii se referă la "culori", adică la datele ce compun domeniile tipurilor utilizate într-o reţea colorată dată. Astfel, dacă "culorile" unui anumit tip sunt simetrice, în sensul că fiecare tranziţie le manevrează pe toate într-o manieră simetrică, şi în plus în marcarea iniţială aceste "culori" sunt simetrice, atunci are sens să se folosească aceste simetrii, lucrînd cu reprezentanţi ai claselor de simetrie, prin construcţia unui graf de apariţie redus, ce conţine doar cîte un nod pentru fiecare clasă de marcări simetrice.

Grafurile de apariţie cu marcări simetrice au fost introduse de K. Jensen şi colaboratorii săi pentru reţele colorate ([34], [41]). Definiţia formală a grafurilor de apariţie cu marcări simetrice include o serie de concepte matematice binecunoscute, cum ar fi grupuri algebrice şi clase de echivalenţă.

Acest tip de graf de apariţie redus conţine exact aceeaşi informaţie ca şi graful de apariţie complet, ceea ce înseamnă că graful redus poate fi folosit pentru a investiga toate acele proprietăţi care pot fi investigate prin intermediul grafului complet.

Graful redus este o versiune abstractizată a grafului complet, într-o manieră similară celei prin care o reţea colorată este o abstractizare a reţelei P/T echivalente ei. Graful de apariţie complet poate fi construit din graful redus, dar aceasta nu este niciodată necesar. Dimpotrivă, analiza proprietăţilor se efectuează direct pe graful redus, şi aceasta se dovedeşte a fi cu mult mai eficient (în comparaţie cu analiza grafului complet).

2.1.2 Mulţimi de atracţie

O a doua posibilitate de reducere derivă din observaţia că o reţea Petri are adesea un număr de secvenţe de apariţie în care paşii sunt identici, cu excepţia ordinii în care apar.

Spre exemplu, să considerăm o marcare M ce are n tranziţii concurent posibile la ea. Atunci vom avea un număr de $n!$ (i.e., factorial de n) secvenţe de apariţie ce încep din M şi ajung toate într-o aceeaşi marcare după n paşi, şi care diferă doar prin ordinea în care apar cei n paşi. Efectul total fiind acelaşi (i.e., se ajunge într-o aceeaşi marcare), se poate pune întrebarea dacă este într-adevăr necesar să se dezvolte toate cele $n!$ variante, şi din fericire s-a constatat că nu.

Dimpotrivă, pentru fiecare marcare accesibilă, se calculează o aşa-numită *mulţime de atracţie*, care este utilizată pentru a decide care dintre tranziţiile posibile la acea marcare trebuie să fie investigate, i.e. lăsate să se producă. Restul tranziţiilor rămîn, fapt garantat prin definiţia mulţimilor de atracţie, posibile în continuare, şi deci se vor putea produce la o marcare ulterioară.

Metoda mulţimilor de atracţie a fost introdusă de A. Valmari ([108], [107]). Utilizarea mulţimilor de atracţie permite adesea obţinerea unei reduceri semnificative a numărului de noduri şi a celui de arce ale grafului de apariţie construit în acest fel, mai ales în situaţia cînd sistemul modelat conţine un număr mare de procese relativ independente.

Din nefericire, folosind metoda mulţimilor de atracţie, uneori este necesară construţia mai multor grafuri de apariţie diferite, deoarece definiţia mulţimii de atracţie folosite depinde de acele proprietăţi pe care dorim să le investigăm.

Demn de reţinut este faptul că utilizarea metodei mulţimilor de atracţie poate fi combinată cu utilizarea metodei marcărilor simetrice. Aceasta deoarece cele două metode sunt "ortogonale", în sensul că marcările simetrice sunt utile atunci cînd avem un număr de procese simetrice, iar mulţimile de atracţie sunt utile atunci cînd avem un număr de procese concurente.

Prin urmare, atunci cînd procesele sunt şi simetrice, şi concurente, pot fi folosite simultan ambele metode, ceea ce oferă adesea o reducere îmbunătăţită faţă de cazul în care s-ar fi folosit doar una dintre metode.

2.1.3 Marcări de acoperire

O a treia posibilitate de reducere este de a ne uita la secvenţele de apariţie care conduc dintr-o marcare accesibilă M_1 într-o *marcare de acoperire* M_2, i.e. o marcare $M_2 > M_1$. Efectul total al unei asemenea secvenţe este de a adăuga puncte în unele locaţii, şi deci este clar că putem repeta paşii acelei secvenţe ori de cîte ori vrem, o parte dintre locaţii căpătînd astfel coeficienţi oricît de mari.

Ideea, folosită prima dată pentru reţele P/T în lucrarea (Karp & Miller [51]), constă în a înlocui aceşti coeficienţi cu ∞, obţinînd un graf de apariţie redus, numit *graf de acoperire*, în care anumite noduri reprezintă multe marcări diferite (care sunt toate identice exceptînd acele locaţii ce au coeficientul ∞).

Graful de acoperire de tip Karp-Miller poate fi la rîndul său simplificat, obţinîndu-se un *graf de acoperire minimal*, pe baza tehnicii dezvoltată pentru reţele P/T de A. Finkel ([22]).

În capitolul 3 va fi prezentată definiţia formală a grafurilor de acoperire, mai întîi pentru reţelele Petri clasice, şi apoi pentru cele cu salturi şi respectiv pentru reţelele colorate, aceasta constituind una din contribuţiile originale aduse de lucrarea de faţă.

Pentru toate clasele de reţele Petri, se poate demonstra cu uşurinţă că graful de acoperire obţinut este întotdeauna finit, spre deosebire de graful de apariţie, care de multe ori este infinit.

Cu toate acestea, metoda are anumite dezavantaje. În primul rînd, se obţine o reducere doar pentru sisteme nemărginite (iar majoritatea sistemelor practice sunt mărginite). În al doilea rînd, se pierde atît de multă informaţie prin această tehnică de reducere, încît mai multe proprietăţi importante (cum ar fi viabilitatea şi accesibilitatea) nu mai sunt complet decidabile.

De reţinut faptul că este posibilă utilizarea metodei marcărilor de acoperire combinată cu metoda marcărilor simetrice, tehnică utilizată în lucrarea (Petrucci [77]), dar justificarea teoretică a acestei metode combinate devine mult mai complexă (faţă de situaţia în care se foloseşte doar metoda marcărilor simetrice).

2.1.4 Marcări simbolice

În sfîrşit, o altă posibilitate de reducere constă în utilizarea unor marcări simbolice pentru construcţia unui *graf de accesibilitate simbolic*, tehnică dezvoltată de G. Chiola şi colaboratorii săi pentru subclasa reţelelor colorate bine-formate ([13]).

O idee asemănătoare este folosirea unor marcări parametrizate pentru construcţia unui *graf de accesibilitate parametrizat*, tehnică dezvoltată de M. Lindqvist pentru reţele predicat/tranziţie ([57]).

2.1.5 Reguli de demonstraţie

Toate metodele menţionate mai sus au fost originar propuse pentru reţele P/T sau pentru reţele colorate neierarhice. Totuşi, s-a dovedit a fi uşoară extensia lor directă la reţele colorate ierarhice, datorită echivalenţelor comportamentale ale celor trei clase de reţele Petri, echivalenţe amintite în capitolul 1.

După ce un graf de apariţie a fost construit, el poate fi folosit pentru a demonstra proprietăţi ale sistemului modelat. Aceasta se face prin aplicarea unui set de *reguli de demonstraţie*, i.e. teoreme care permit persoanei modelatoare să deducă proprietăţi ale reţelei Petri date din proprietăţi ale grafului de apariţie asociat.

Construcţia şi analiza grafurilor de apariţie poate fi complet automatizată (ceea ce s-a şi făcut, spre exemplu, pentru reţele colorate, prin aplicaţia `Design/CPN` [134]). Aceasta înseamnă că persoana modelatoare poate folosi această metodă şi interpreta rezultatele fără a avea prea multe cunoştinţe despre fundamentul matematic al metodei. Pentru sisteme mărginite un mare număr de întrebări pot fi decise complet. Stări de blocare, accesibilitate, margini pentru marcări pot fi decise printr-o simplă inspecţie a nodurilor grafului de apariţie, în timp ce proprietăţi precum viabilitatea şi marcările de revenire pot fi decise prin construcţia şi inspecţia componentelor tare conexe.

Aceasta înseamnă că grafurile de apariţie constituie o modalitate directă de depanare a reţelelor noi, deoarece erori triviale, precum ar fi omisiunea unei expresii de arc sau o expresie de arc greşită, adeseori cauzează modificarea drastică a proprietăţilor pe care ne aşteptăm să le aibă reţeaua respectivă.

Din nefericire, una dintre dificultăţile cele mai importante ale acestei metode este faptul că grafurile de apariţie devin adesea atît de mari încît nu pot fi construite, chiar şi atunci cînd sunt aplicate tehnicile de reducere descrise mai sus. De aceea, adesea trebuie să se simplifice reţeaua analizată, sau să se analizeze separat diversele componente ale ei.

2.2 Invarianţi locaţie şi tranziţie

Invarianţii locaţie şi tranziţie sunt o metodă de analiză formală a reţelelor Petri ce a fost introdusă prima dată pentru reţele P/T de către K. Lautenbach ([55], [56]).

Ideea de bază a invarianţilor locaţie (numiţi şi S-invarianţi) este de a construi ecuaţii care sunt satisfăcute de către toate marcările accesibile, o idee ce este similară cu cea a invarianţilor utilizaţi în verificarea programelor. Mai întîi formulăm nişte ecuaţii, pe care le postulăm a fi satisfăcute independent de paşii care apar în evoluţia reţelei. Apoi demonstrăm că ecuaţiile sunt într-adevăr satisfăcute, şi în final le utilizăm pentru a demonstra anumite proprietăţi dinamice ale sistemului modelat.

Invarianţii tranziţie (numiţi şi T-invarianţi) sunt dualul invarianţilor locaţie. Ei determină secvenţe de apariţie care nu au nici un efect total, i.e. secvenţe ce au aceleaşi marcări de început şi de sfîrşit.

Invarianţii locaţie şi tranziţie pot fi folosiţi pentru a demonstra multe tipuri de proprietăţi dinamice ale reţelelor Petri, cum ar fi: proprietăţi de accesibilitate, de mărginire, de revenire, de viabilitate şi de echitate. Un alt avantaj al invarianţilor este acela că ei pot fi construiţi în timpul fazei de proiectare a sistemului, şi aceasta va ajuta, de obicei, la obţinerea unui proiect mai bun. Singurul dezavantaj al invarianţilor este acela că necesită deprinderi matematice mult mai considerabile decît multe dintre celelalte metode de analiză.

În capitolul 4 va fi prezentată tehnica invarianţilor, mai întîi pentru reţelele Petri clasice, şi apoi pentru cele cu salturi, aceasta fiind o altă contribuţie originală adusă de această lucrare.

2.3 Reguli de reducere

Reţelele Petri pot fi analizate şi prin metoda *reducerii*, în care ideea de bază este următoarea. Mai întîi se alege una sau mai multe tipuri de proprietăţi ce se doresc a fi investigate. Apoi se defineşte un set de *reguli de reducere* prin care se pot simplifica reţelele, fără a modifica acele proprietăţi ce se doresc a fi investigate. De obicei, regulile sunt locale, în sensul că fiecare din ele permite înlocuirea unei subreţele cu o altă subreţea.

După ce s-a definit un set de reguli de reducere, trebuie să se arate că acesta este corect, i.e. că aplicarea acelor reguli nu modifică niciodată proprietăţile ce se doresc a fi investigate. Această demonstraţie se face o singură dată, la început, după care se poate aplica acel set de reguli pentru oricîte reţele se doreşte, oricînd se doreşte.

Un bun set de reguli de reducere trebuie, pe lîngă a fi corect, să fie şi puternic, în sensul de a permite obţinerea unei reduceri semnificative, astfel încât reţeaua redusă să fie mult mai uşor de analizat decît cea originală.

Multe dintre tehnicile de reducere cunoscute pentru reţele colorate sunt translatări directe ale regulilor de reducere dezvoltate pentru reţele P/T. O prezentare a tehnicilor de reducere folosite pentru reţelele colorate poate fi găsită în lucrările lui Genrich ([24]) şi Haddad ([29]).

2.4 Analiza de performanţă

Majoritatea aplicaţiilor reţelelor Petri constau în investigarea corectitudinii logice a unui sistem. Aceasta înseamnă că se analizează proprietăţile şi funcţionalitatea sistemului (i.e., dacă acesta produce rezultatele aşteptate).

Totuşi, reţelele Petri pot fi utilizate de asemenea şi pentru a investiga performanţa unui sistem (de exemplu, timpul maxim necesar pentru execuţia unor operaţii specificate sau timpul mediu pentru anumite cereri). Pentru a efectua astfel de analize, este convenabilă extinderea modelului reţelelor Petri, atît clasice, cît şi colorate, cu un concept de *timp*. Apoi se specifică cum diferitele activităţi şi stări ale sistemului "consumă" timp.

Analiza de performanţă este unul dintre cele mai mari şi mai importante subdomenii ale reţelelor Petri, existînd la ora actuală o serie întreagă de lucrări ce descriu diverse extensii temporale ale reţelelor Petri. Aceasta importanţă este subliniată şi de seria simpozioanelor internaţionale "Petri Nets and Performance Models", serie desfăşurată cu o periodicitate bianuală, începînd din 1985.

În capitolele următoare vor fi detaliate cîteva dintre metodele de analiză formală a reţelelor Petri prezentate sumar în acest capitol, accentul fiind pus pe contribuţiile originale pe care le-am adus în acest domeniu.

Capitolul 3

Structuri de acoperire şi probleme decidabile

Structurile de accesibilitate şi cele de acoperire constituie o metodă de analiză formală a reţelelor Petri ce a fost introdusă pentru prima dată în lucrarea (Karp & Miller [51]) pentru sisteme aditive de vectori, şi preluată apoi pentru reţele P/T, întrucît aceste două modele sunt echivalente ([69]).

Ele se bazează atît pe *structura* reţelei, cît şi pe starea (i.e. marcarea) iniţială a reţelei, şi sunt utilizate pentru studiul comportamentului reţelei (i.e. evoluţia reţelei, pornind de la marcarea iniţială a reţelei) şi, de asemenea, după cum vom arăta în acest capitol, pentru rezolvarea unor probleme de decizie referitoare la cîteva proprietăţi ale reţelelor Petri, proprietăţi ce depind, printre altele, şi de structura reţelei.

În plus, ele pot fi folosite şi pentru calculul gradelor de concurenţă a reţelelor Petri, despre care vom discuta în capitolul 5.

Ideea de bază a *grafurilor de accesibilitate* este de a construi un graf ce conţine cîte un nod pentru fiecare marcare accesibilă şi cîte un arc pentru fiecare apariţie a unei tranziţii, arc ce conectează nodurile corespunzătoare marcărilor între care se produce respectiva tranziţie.

Un asemenea graf mai este întîlnit în literatura de specialitate despre reţele Petri şi sub denumirea de *graf de apariţie*, deoarece această denumire surprinde faptul că acest graf conţine informaţii nu doar despre marcările accesibile, ci şi despre apariţiile tranziţiilor.

De asemenea, mai este întîlnită şi noţiunea de *arbore de accesibilitate*, care practic reprezintă "desfăşurătorul" grafului de accesibilitate: se porneşte ca nod rădăcină cu marcarea iniţială a reţelei şi se adaugă cîte un arc pentru fiecare apariţie a unei tranziţii, avînd ca nod destinaţie al acelui arc un nou nod, chiar dacă marcarea produsă a mai apărut deja în arborele construit pînă la acel pas.

Pentru optimizare, în graful (şi arborele) de accesibilitate se omit arcele corespunzătoare paşilor formaţi din mai mult de o tranziţie, fără ca prin aceasta să se piardă prea multe informaţii. Cu toate acestea, grafurile (şi arborii) de accesibilitate pot deveni foate mari, chiar şi pentru reţele mici, ceea ce face ca procesul de construcţie şi investigaţie a acestora să fie dificil şi posibil supus erorilor.

Din acest motiv, au fost necesare tehnici prin care să se poată construi grafuri de accesibilitate *reduse*, fără a se pierde prea multă informaţie. Cîteva din tehnicile dezvoltate pentru a obţine o asemenea reducere au fost prezentate sumar în capitolul 2 (marcări simetrice, mulţimi de atracţie, marcări de acoperire, ş.a.). Demn de reţinut este faptul că, pentru toate aceste tehnici, graful de accesibilitate redus poate fi construit direct, fără a construi mai întîi graful de apariţie complet.

În capitolul de faţă ne vom concentra atenţia asupra uneia dintre aceste tehnici, şi anume *structurile de acoperire* pentru reţele Petri, accentul fiind pus pe structurile *minimale*, pentru care reducerea obţinută este maximă.

Construcţia şi analiza grafurilor de accesibilitate reduse poate fi complet automatizată (a se vedea, spre exemplu, aplicaţia `Design/CPN` [134] pentru reţele colorate). Acest fapt prezintă avantajul că persoana modelatoare poate folosi această metodă şi interpreta rezultatele fără a avea prea multe cunoştinţe despre fundamentul matematic al metodei. Pentru sisteme mărginite un mare număr de întrebări pot fi decise complet. Stări de blocare, accesibilitate, margini pentru marcări pot fi decise printr-o simplă inspecţie a nodurilor grafului de accesibilitate, în timp ce proprietăţi precum viabilitatea şi marcările de revenire pot fi decise prin construcţia şi inspecţia componentelor tare conexe.

De asemenea, şi pentru sisteme nemărginite se pot decide o serie de proprietăţi ale reţelelor Petri, cum ar fi: proprietăţi de acoperire, de mărginire, de simultan-nemărginire, de finititudine a mulţimii de accesibilitate, de pseudo-viabilitate şi de regularitate a limbajului acceptat.

3.1 Structuri de acoperire pentru reţele P/T

În primele două subsecţiuni din această secţiune voi face o trecere în revistă a structurilor de accesibilitate si, respectiv, a structurilor de acoperire de tip Karp–Miller pentru reţele P/T, urmând în principal prezentarea acestora făcută în lucrarea (Jucan & Ţiplea [48]). Iar în a treia subsecţiune voi prezenta structurile de acoperire minimale pentru reţele P/T, pe baza lucrării [22].

Apoi, în a treia subsecţiune, voi prezenta problemele de decizie care sunt decidabile pentru reţelele P/T atît pe baza structurilor de acoperire de tip Karp–Miller, cît şi pe baza structurilor de acoperire minimale.

În sfîrşit, ultima subsecţiune este dedicată tratării cazului reţelelor P/T cu marcări iniţiale infinite, deoarece acestea vor fi utilizate în secţiunea 3.2 pentru a putea defini structuri de acoperire pentru reţele Petri cu salturi.

3.1.1 Structuri de accesibilitate

Modelarea sistemelor concurente prin intermediul reţelelor P/T a condus la necesitatea investigării mulţimii tuturor marcărilor accesibile ale unei reţele P/T marcate. De la definiţia acestei mulţimi urmează că putem construi, în mod natural, un arbore ale cărui noduri sunt etichetate cu marcări, ale cărui arce sunt etichetate cu tranziţii şi astfel încât:

(1) rădăcina v_0 a arborelui să fie etichetată cu marcarea iniţială a reţelei;

(2) dacă v este un nod al arborelui, etichetat cu o marcare M, atunci pentru orice $t \in T$ astfel încât $M[t\rangle$, există un nod distinct v' etichetat cu $M' = M + \Delta t$, şi un arc (v, v'), care este etichetat cu t.

Acest arbore este numit, în mod curent, arborele de accesibilitate al reţelei.

Definiţia 3.1.1 *Se numeşte* arbore de accesibilitate *al unei reţele P/T marcate $\gamma = (\Sigma, M_0)$, orice arbore $(\mathbb{N}^S, T)$-etichetat $\mathcal{RT} = (V, E, l_V, l_E)$ cu următoarele proprietăţi:*

(i) rădăcina lui, notată v_0, este etichetată cu M_0, adică $l_V(v_0) = M_0$;

(ii) pentru orice nod $v \in V$, $|v^+| = |T(l_V(v))|$;

(iii) pentru orice $v \in V$ cu $|v^+| > 0$ şi orice $t \in T(l_V(v))$ există $v' \in v^+$ astfel încât:

(iii.1) $(v, v') \in E$;

(iii.2) $l_V(v') = l_V(v) + \Delta t$;

(iii.3) $l_E(v, v') = t$.

Este uşor de văzut că dacă $\mathcal{RT}$ şi $\mathcal{RT}'$ sunt doi arbori de accesibilitate ai unei reţele P/T marcate γ, atunci ei sunt izomorfi. Din acest motiv putem vorbi de arborele de accesibilitate al unei reţele P/T marcate γ, arbore ce va fi notat prin $\mathcal{RT}(\gamma)$. Aşadar,

Observaţia 3.1.1 *Arborele de accesibilitate $\mathcal{RT}(\gamma)$ este unic (via izomorfismul de arbori $(\mathbb{N}^S, T)$-etichetaţi).*

Exemplul 3.1.1 *Fie $\gamma_1 = (\Sigma_1, M_0^1)$ şi $\gamma_2 = (\Sigma_2, M_0^2)$ reţelele P/T marcate din figurile 3.1(a) şi, respectiv, 3.1(b). Arborii lor de accesibilitate sunt parţial reprezentaţi în figura 3.2.*

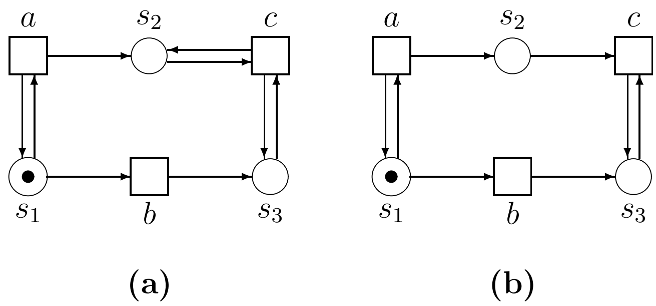


Figura 3.1: Reţelele P/T din exemplul 3.1.1

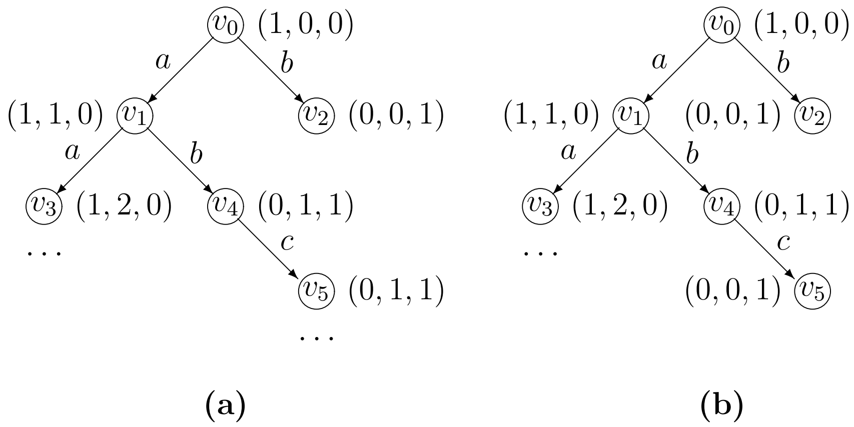


Figura 3.2: Arborii de accesibilitate ai reţelelor din exemplul 3.1.1

Proprietăţile de bază ale arborelui de accesibilitate sunt date de următoarea propoziţie a cărei demonstraţie este imediată de la definiţii.

Propoziţia 3.1.1 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o mPTN şi $\mathcal{RT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele de accesibilitate al reţelei γ. Atunci, au loc următoarele proprietăţi:*

(1) $\mathcal{RT}(\gamma)$ *este finit ramificat;*

(2) un nod v al arborelui $\mathcal{RT}(\gamma)$ este nod frunză dacă şi numai dacă nu există $t \in T$ astfel încât $l_V(v)\,[t\rangle$;

(3) $RS(\gamma) = \{l_V(v) \mid v \in V\}$.

Graful de accesibilitate $\mathcal{RG}(\gamma)$ al unei P/T-reţele marcate γ se defineşte ca fiind graful orientat etichetat (pe arce) obţinut din arborele de accesibilitate $\mathcal{RT}(\gamma)$ prin "identificarea" nodurilor avînd aceeaşi etichetă.

Definiţia 3.1.2 *Se numeşte* graful de accesibilitate *al unei reţele P/T marcate $\gamma = (\Sigma, M_0)$, graful orientat etichetat $\mathcal{RG}(\gamma) = ([M_0\rangle_\gamma, T, E)$, mulţimea E a arcelor etichetate fiind definită prin:*

$$\forall\, M_1, M_2 \in [M_0\rangle_\gamma, \forall\, t \in T: \quad (M_1, t, M_2) \in E \quad \Leftrightarrow \quad M_1\,[t\rangle_\gamma\, M_2.$$

3.1.2 Structuri de acoperire Karp–Miller

Arborele de accesibilitate al unei reţele P/T marcate γ poate fi infinit chiar dacă mulţimea $RS(\gamma)$ este finită, aşa cum ne arată reţeaua din figura 3.3(a) al cărei arbore de accesibilitate este parţial desenat în figura 3.3(b).

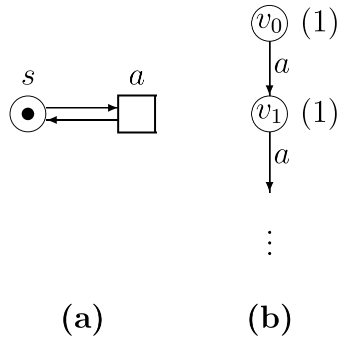


Figura 3.3: Reţea P/T cu arbore de accesibilitate infinit

Mai mult, chiar şi graful de accesibilitate al unei reţele P/T marcate γ poate fi infinit (mai exact, este infinit dacă şi numai dacă mulţimea $RS(\gamma)$ este infinită). Din acest motiv, cercetătorii au căutat unele rafinări ale acestor structuri de accesibilitate, ce pot produce (sub-)structuri *finite* cu păstrarea a cît mai multor proprietăţi ale reţelei respective.

Ca urmare a acestui aspect, un studiu al mulţimii $RS(\gamma)$ prin intermediul arborelui $\mathcal{RT}(\gamma)$ este dificil de realizat. Putem însă obţine de la $\mathcal{RT}(\gamma)$ un arbore finit $\mathcal{T}(\gamma)$ fără a pierde "prea multe" informaţii despre marcările accesibile ale reţelei. Ideea este de a "trunchia" ramurile "structurate regulat" şi de a indica respectiva regularitate în eticheta frunzelor. Să presupunem că un drum $v_0, v_1, v_2, \ldots$ al lui $\mathcal{RT}(\gamma)$ are două noduri v_i şi v_j $(i < j)$ astfel încât $l_V(v_i) \leq l_V(v_j)$. $\mathcal{RT}(\gamma)$ va avea în acest caz un drum infinit care va repeta la infinit secvenţa $l_E(v_i, v_{i+1}) \cdots l_E(v_{j-1}, v_j)$. Această secvenţă o vom înlocui în $\mathcal{T}(\gamma)$ printr-o frunză. Eticheta M a frunzei va fi dată prin:

$$M(s) = \begin{cases} l_V(v_i)(s) & \text{, dacă } l_V(v_i)(s) = l_V(v_j)(s) \\ \omega & \text{, dacă } l_V(v_i)(s) < l_V(v_j)(s) \end{cases} , \forall\, s \in S.$$

$M(s) = \omega$ ne spune că numărul de puncte din locaţia s poate creşte nemărginit în cadrul ramurii înlocuite.

Ideea unei astfel de rafinări a fost introdusă de R.M. Karp şi R.E. Miller ([51]) în studiul mulţimii de accesibilitate a unui sistem aditiv de vectori. Întrucît sistemele aditive de vectori sunt echivalente cu reţelele Petri P/T ([69], [73], [52]), această idee a fost preluată şi aplicată pentru cazul reţelelor P/T ([10], [83], [47]).

Arborele (şi graful) de acoperire Karp–Miller a reprezentat prima structură *redusă* de accesibilitate folosită pentru studiul mulţimii de accesibilitate a unei reţele P/T, şi a fost urmată de o serie de alte idei de rafinare (ce au fost prezentate în secţiunea 2.1 din capitolul 2).

Arborele de acoperire Karp–Miller este un arbore finit $(\mathbb{N}_\omega^S, T)$-etichetat ce este construit de algoritmul descris în [51]. Definiţia sa poate fi formalizată în felul următor:

Definiţia 3.1.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată. Se numeşte* arbore de acoperire Karp–Miller *al reţelei γ orice arbore $(\mathbb{N}_\omega^S, T)$-etichetat,*

$$\mathcal{T} = (V, E, l_V, l_E),$$

ce satisface următoarele proprietăţi:

(i) rădăcina lui, notată v_0, este etichetată cu M_0, adică $l_V(v_0) = M_0$;

(ii) pentru orice nod $v \in V$ are loc:

- *$|v^+| = 0$, dacă $T(l_V(v)) = \emptyset$ sau există $v' \in d_{\mathcal{T}}(v_0, v)$ diferit de v astfel încât $l_V(v) = l_V(v')$;*
- *$|v^+| = |T(l_V(v))|$, altfel;*

(iii) pentru orice $v \in V$ cu $|v^+| > 0$ şi orice $t \in T(l_V(v))$ există $v' \in V$ astfel încât:

(iii.1) $(v, v') \in E$;

(iii.2) pentru orice $s \in S$ are loc:

- *$l_V(v')(s) = \omega$, dacă există $v'' \in d_{\mathcal{T}}(v_0, v)$ astfel încât*

$$l_V(v'') \leq l_V(v) + \Delta t \quad \text{şi} \quad l_V(v'')(s) < (l_V(v) + \Delta t)(s);$$

- *$l_V(v')(s) = (l_V(v) + \Delta t)(s)$, altfel;*

(iii.3) $l_E(v, v') = t$.

Ca şi în cazul arborelui de accesibilitate, este uşor de văzut că orice doi arbori de acoperire ai unei reţele P/T marcate sunt izomorfi. Putem vorbi atunci de arborele de acoperire Karp–Miller al unei reţele P/T marcate γ; el va fi notat prin $\mathcal{KMT}(\gamma)$.

Observaţia 3.1.2 *Arborele de acoperire $\mathcal{KMT}(\gamma)$ este unic (via izomorfismul de arbori $(\mathbb{N}_\omega^S, T)$-etichetaţi).*

Exemplul 3.1.2 *Reţelele P/T marcate din figura 3.1 au acelaşi arbore de acoperire ce este reprezentat grafic în figura 3.4. Trebuie să remarcăm că cele două reţele sunt diferite atât structural cât şi comportamental.*

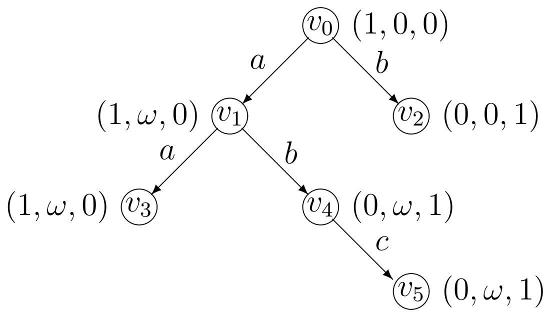


Figura 3.4: Arborele de acoperire al reţelelor din exemplul 3.1.1

Notaţia 3.1.1 *După cum observăm, etichetele nodurilor arborelui de acoperire sunt funcţii de la S la $\mathbb{N}_\omega$. Finititudinea reţelei ne permite să identificăm aceste funcţii cu vectori $|S|$-dimensionali peste $\mathbb{N}_\omega$. Dacă M este un astfel de vector, atunci componentele ce conţin ω au mai fost numite şi ω-*componente*; mulţimea tuturor acestor ω-componente a fost notată prin $\Omega(M)$. Adică,*

$$\Omega(M) = \{s \in S \mid M(s) = \omega\}.$$

Următoarea lemă este utilă în stabilirea câtorva proprietăţi importante ale arborelui de acoperire.

Lema 3.1.1 (Lema lui König, [53])
Orice arbore infinit dar finit ramificat conţine cel puţin un drum infinit.

Propoziţia ce urmează prezintă câteva proprietăţi de bază ale arborelui de acoperire.

Propoziţia 3.1.2 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o mPTN şi $\mathcal{KMT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de acoperire (cu rădăcina v_0). Atunci, au loc următoarele proprietăţi:*

(1) $\mathcal{KMT}(\gamma)$ este finit ramificat;

(2) un nod v al arborelui $\mathcal{KMT}(\gamma)$ este nod frunză dacă şi numai dacă ori $T(l_V(v)) = \emptyset$, ori există $v' \in d_{\mathcal{KMT}(\gamma)}(v_0, v)$ astfel încât $v \neq v'$ şi $l_V(v) = l_V(v')$;

(3) fie $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$ noduri distincte două câte două şi astfel încât

$$v_{i_j} \in d_{\mathcal{KMT}(\gamma)}(v_0, v_{i_{j+1}}),$$

pentru orice $0 \leq j \leq m-1$.

(3.1) Dacă $l_V(v_{i_0}) = l_V(v_{i_1}) = \cdots = l_V(v_{i_m})$, atunci $m \leq 1$;

(3.2) Dacă $l_V(v_{i_0}) < l_V(v_{i_1}) < \cdots < l_V(v_{i_m})$, atunci $m \leq |S|$;

(4) $\mathcal{KMT}(\gamma)$ este finit.

Demonstraţie. Aceste afirmaţii se demonstrează uşor, folosind lema lui König (demonstraţia lor poate fi consultată în lucrarea [48], pag. 96). □

Corolarul 3.1.1 *Pentru orice reţea P/T marcată γ, arborele ei de acoperire $\mathcal{KMT}(\gamma)$ poate fi efectiv construit.*

Notaţia 3.1.2 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea mPTN şi $\mathcal{KMT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de acoperire. Dacă $(v_1, v_2) \in E$, $l_E(v_1, v_2) = t$, $l_V(v_1) = M_1$ şi $l_V(v_2) = M_2$, atunci vom nota*

$$(v_1, M_1) \xrightarrow{t} (v_2, M_2).$$

De fapt, am definit o relaţie de calcul în arborele $\mathcal{KMT}(\gamma)$. În manieră naturală extindem relaţia $\xrightarrow{t}$ la $\xrightarrow{w}$, unde $w \in T^*$ (atunci când este posibil).

Propoziţia 3.1.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată şi $\mathcal{KMT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de acoperire. Dacă $v_1, v_2 \in V$, $w \in T^*$ şi $(v_1, l_V(v_1)) \xrightarrow{w} (v_2, l_V(v_2))$, atunci $l_V(v_2)(s) = (l_V(v_1) + \Delta w)(s)$, pentru orice $s \in S - \Omega(l_V(v_2))$.*

Demonstraţie. Această afirmaţie se demonstrează uşor, prin inducţie după $k = |w|$ (vezi lucrarea [48], pag. 98). □

Următoarea teoremă reprezintă rezultatul fundamental ce stabileşte legătura dintre mulţimea tuturor marcărilor accesibile într-o reţea marcată γ şi mulţimea etichetelor nodurilor arborelui ei de acoperire.

Teorema 3.1.1 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o mPTN, $\mathcal{KMT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de acoperire şi $M \in \mathbb{N}^S$. Atunci, are loc:*

$$(\exists\, M' \in [M_0\rangle : \; M \leq M') \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, v \in V : \; M \leq l_V(v)).$$

Demonstraţie. Demonstraţia acestui rezultat este ceva mai lungă şi poate fi consultată în lucrarea [48], pag. 98–101). □

Corolarul 3.1.2 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată, $\mathcal{KMT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de acoperire şi $t \in T$. Atunci, are loc:*

$$(\exists\, M \in [M_0\rangle : \; M[t\rangle) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, (v, v') \in E : \; l_E(v, v') = t).$$

Demonstraţie. Această afirmaţie rezultă imediat de la teorema anterioară (vezi [48], pag. 101). □

Notaţia 3.1.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată şi $\mathcal{KMT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de acoperire. Notăm prin $LAB(\gamma)$ mulţimea tuturor etichetelor nodurilor arborelui $\mathcal{KMT}(\gamma)$, adică*

$$LAB(\gamma) = \{l_V(v) \mid v \in V\}.$$

În continuare vom menţiona încă o proprietate a arborelui de acoperire.

Propoziţia 3.1.4 *Fie γ o reţea P/T marcată. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) $LAB(\gamma) \subseteq \mathbb{N}^S$*;*

(2) $RS(\gamma) = LAB(\gamma)$*;*

(3) $RS(\gamma)$ *este finită.*

Demonstraţie. Pentru demonstraţia acestei propoziţii a se vedea lucrarea [48], pag. 102. □

Încheiem această subsecţiune prin a aminti noţiunea de graf de acoperire.

Analog manierei prin care arborelui de accesibilitate $\mathcal{RT}(\gamma)$ al unei reţele P/T marcate γ i-am asociat graful de accesibilitate $\mathcal{RG}(\gamma)$, şi arborelui de acoperire $\mathcal{KMT}(\gamma)$ îi putem asocia graful de acoperire $\mathcal{KMG}(\gamma)$, definit ca fiind graful orientat etichetat (pe arce) obţinut din arborele de acoperire $\mathcal{KMT}(\gamma)$ prin "identificarea" nodurilor avînd aceeaşi etichetă.

Definiţia 3.1.4 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată şi $\mathcal{KMT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de acoperire. Se numeşte* graful de acoperire Karp–Miller *al reţelei γ, graful orientat etichetat $\mathcal{KMG}(\gamma) = (LAB(\gamma), T, E')$, mulţimea E' a arcelor etichetate ale grafului fiind definită astfel:*

$$(M_1, t, M_2) \in E' \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, v_1, v_2 \in V : \ (v_1, M_1) \xrightarrow{t} (v_2, M_2),$$

pentru orice $M_1, M_2 \in LAB(\gamma)$, şi orice $t \in T$,
$LAB(\gamma)$ fiind mulţimea etichetelor nodurilor arborelui de acoperire (notaţia 3.1.3), iar $\xrightarrow{t}$ fiind relaţia de calcul din arborele de acoperire (notaţia 3.1.2).

Propoziţia 3.1.5 *Pentru orice reţea P/T marcată γ, graful ei de acoperire $\mathcal{KMG}(\gamma)$ poate fi efectiv construit.*

Demonstraţie. Rezultă imediat pe baza definiţiei grafului de acoperire şi a rezultatului similar pentru arborele de acoperire (vezi corolarul 3.1.1). □

3.1.3 Structuri de acoperire minimale

Clasa de algoritmi, pentru analiza reţelelor P/T, bazaţi pe grafuri de accesibilitate reduse finite (cum este graful de acoperire Karp–Miller), are dezavantajul că dimensiunea grafului este deseori în practică prea mare pentru a putea calcula în timp şi spaţiu rezonabil acel graf. Din acest motiv, eforturile unora dintre cercetători s-au orientat spre reducerea timpului şi spaţiului necesar pentru construirea unor grafuri de accesibilitate reduse finite.

În cele ce urmează vom prezenta rezultatele obţinute în acest sens de către Alain Finkel (în lucrarea [22]). El are meritul de a fi disociat definiţia noţiunii de graf de acoperire de algoritmul care construieşte acel graf. Pentru aceasta, A. Finkel a pornit de la proprietăţile necesare pentru a rezolva problemele de decizie decidabile pe baza grafului de acoperire Karp–Miller (acestea sunt prezentate în următoarea subsecţiune), apoi a definit noţiunea de mulţimi de acoperire şi cea de grafuri de acoperire, după care a căutat, şi a găsit, un algoritm eficient care să construiască graful de acoperire minimal.

După cum vom vedea în subsecţiunea următoare, ceea ce permite rezolvarea problemelor de decizie (FRSP), (BP), (SuBP), (QLP), (CP) nu este chiar exact graful de acoperire Karp–Miller, ci mai precis mulţimea etichetelor nodurilor sale. A. Finkel a formalizat această idee introducînd noţiunea de mulţime de acoperire:

Definiţia 3.1.5 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată.*
i) Se numeşte mulţime de acoperire *pentru γ orice submulţime de pseudo-marcări, $CS(\gamma) \subseteq \mathbb{N}_\omega^S$, care satisface următoarele două condiţii:*

(1) pentru orice marcare accesibilă, $M \in RS(\gamma)$, există o marcare $M' \in CS(\gamma)$ astfel încât $M \leq M'$;

(2) pentru orice marcare $M' \in CS(\gamma) - RS(\gamma)$ există un şir strict crescător de marcări accesibile $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ convergent la M'.

ii) O mulţime de acoperire $CS(\gamma)$ se numeşte minimală *dacă nici o submulţime proprie a lui $CS(\gamma)$ nu este mulţime de acoperire pentru reţeaua γ.*

Cîteva proprietăţi ale mulţimilor de acoperire sunt enumerate în următoarea propoziţie, a cărei demonstraţie poate fi găsită în lucrarea amintită mai sus ([22]):

Propoziţia 3.1.6 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată.*
a) Dacă $CS(\gamma)$ este o mulţime de acoperire pentru γ şi există $M_1, M_2 \in CS(\gamma)$, $M_1 \neq M_2$, astfel încât $M_1 \leq M_2$, atunci $CS'(\gamma) = CS(\gamma) - \{M_1\}$

este mulţime de acoperire pentru γ.
b) O mulţime de acoperire minimală nu conţine două marcări distincte comparabile.
c) Dacă $CS(\gamma)$ *este o mulţime de acoperire pentru* γ *şi* $CS'(\gamma)$ *este mulţimea marcărilor maximale (în raport cu ordinea uzuală de pe* $\mathbb{N}_\omega^S$*) ale mulţimii* $CS(\gamma)$*, atunci* $CS'(\gamma)$ *este mulţime de acoperire minimală pentru* γ.
d) Pentru orice două mulţimi de acoperire, mulţimile marcărilor maximale ale acestora coincid şi sunt egale cu mulţimea de acoperire minimală.
e) Mulţimea de acoperire minimală pentru reţeaua γ *este finită şi unică, şi va fi notată cu* $MCS(\gamma)$.

În subsecţiunea următoare vom vedea care probleme de decizie sunt decidabile doar pe baza mulţimii de acoperire minimală $MCS(\gamma)$, deci fără a fi nevoie de structura de arbore sau graf de acoperire.

În continuare, vom prezenta noţiunile de arbore, pădure şi graf de acoperire introduse de A. Finkel pentru reţele P/T:

Definiţia 3.1.6 *Fie* $\gamma = (\Sigma, M_0)$ *o reţea P/T marcată.*
i) Se numeşte arbore de acoperire *pentru* γ *orice arbore* $(CS(\gamma), T)$*-etichetat*

$$\mathcal{CT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E),$$

cu proprietăţile următoare:

(a) *mulţimea etichetelor nodurilor,* $CS(\gamma)$*, este o mulţime de acoperire pentru reţeaua* γ*;*

(b) *mulţimea etichetelor arcelor,* T*, este mulţimea tranziţiilor reţelei* γ*;*

(c) $\{l_V(v) \mid v \in V\} = CS(\gamma)$ *(i.e. funcţia* l_V *este surjectivă);*

(d) *mulţimea arcelor,* E*, este formată din toate arcele de tip (1) şi din arce de tip (2) (nu neapărat toate arcele de tip (2)), i.e.* $E = E_1 \cup E_2'$*, cu* $E_2' \subseteq E_2$*, unde mulţimile de arce* E_1 *şi* E_2 *sunt definite pe baza doar a reţelei* γ *şi a mulţimii de acoperire* $CS(\gamma)$*, după cum urmează:*

   - $(v, v') \in E$ *se numeşte* arc de tip (1) *dacă* $l_V(v)\,[l_E(v, v')\rangle_\gamma\, l_V(v')$.
     E_1 *denotă mulţimea tuturor arcelor de tip (1).*
   - $(v, v') \in E$ *se numeşte* arc de tip (2) *dacă* $l_V(v)\,[l_E(v, v')\rangle_\gamma$ *şi* $\neg\ l_V(v)\,[l_E(v, v')\rangle_\gamma\, l_V(v')$ *şi* $\exists \{w_n\}_{n\geq 0} \subseteq T^*$ *un şir de secvenţe de tranziţie astfel încât* $l_V(v)\,[w_n\rangle_\gamma\, M_n\,, \forall\, n \geq 0$ *(i.e. secvenţa de tranziţie* w_n *este posibilă la marcarea* $l_V(v)$ *şi prin producerea ei se ajunge într-o marcare* M_n*,* $\forall\, n \geq 0$*), şi* $\lim M_n = l_V(v')$.
     E_2 *denotă mulţimea tuturor arcelor de tip (2).*

ii) Se numeşte arbore de acoperire minimal *pentru γ, $\mathcal{MCT}(\gamma)$, orice arbore de acoperire pentru γ, pentru care mulţimea etichetelor nodurilor este chiar mulţimea de acoperire minimală $MCS(\gamma)$.*

Observaţia 3.1.3 *$\mathcal{MCT}(\gamma)$ nu este neapărat unic (deoarece doi arbori de acoperire minimali pot diferi prin arcele de tip (2) din care sunt formaţi).*

Definiţia 3.1.7 *i) Se numeşte* pădure de acoperire *pentru γ orice graf orientat (nu neapărat conex) etichetat pe noduri şi pe arce $\mathcal{CF}(\gamma)$ obţinut dintr-un arbore de acoperire $\mathcal{CT}(\gamma)$ prin eliminarea tuturor arcelor de tip (2) ale acestuia.*
ii) Se numeşte pădure de acoperire minimală *pentru γ orice graf orientat (nu neapărat conex) etichetat pe noduri şi pe arce $\mathcal{MCF}(\gamma)$ obţinut dintr-un arbore de acoperire minimal $\mathcal{MCT}(\gamma)$ prin eliminarea tuturor arcelor de tip (2) ale acestuia.*

Observaţia 3.1.4 *Pădurea de acoperire minimală $\mathcal{MCF}(\gamma)$ este unică. (Justificare: unicitatea decurge din faptul că $\mathcal{MCF}(\gamma)$ este unic determinată de mulţimea etichetelor nodurilor, $MCS(\gamma)$, şi de mulţimea arcelor, E, formată doar din arcele de tip (1).)*

Definiţia 3.1.8 *i) Se numeşte* graf de acoperire *pentru γ orice graf orientat T-etichetat*

$$\mathcal{CG}(\gamma) = (CS(\gamma), T, E),$$

cu proprietăţile următoare:

(a) mulţimea nodurilor, $CS(\gamma)$, este o mulţime de acoperire pentru γ;

(b) mulţimea etichetelor (arcelor), T, este mulţimea tranziţiilor reţelei γ;

(c) mulţimea arcelor etichetate, E, este formată din toate arcele de tip (1):

$$\forall\, M, M' \in CS(\gamma), \forall\, t \in T: \quad (M, t, M') \in E \quad \Leftrightarrow \quad M\,[t\rangle_\gamma\, M'\,.$$

ii) Se numeşte graf de acoperire minimal *pentru γ, $\mathcal{MCG}(\gamma)$, orice graf de acoperire pentru γ, pentru care mulţimea nodurilor este chiar mulţimea de acoperire minimală $MCS(\gamma)$.*

Observaţia 3.1.5 *i) Orice $\mathcal{CG}(\gamma)$ se obţine dintr-un arbore de acoperire $\mathcal{CT}(\gamma)$ prin eliminarea arcelor de tip (2) şi identificarea nodurilor cu aceeaşi etichetă. Sau, altfel spus, $\mathcal{CG}(\gamma)$ se obţine dintr-o pădure de acoperire $\mathcal{CF}(\gamma)$ prin identificarea nodurilor cu aceeaşi etichetă.*

ii) $\mathcal{MCG}(\gamma)$ *se obţine din orice arbore de acoperire minimal* $\mathcal{MCT}(\gamma)$ *prin eliminarea arcelor de tip (2) şi identificarea nodurilor cu aceeaşi etichetă. Sau, altfel spus,* $\mathcal{MCG}(\gamma)$ *se obţine din pădurea de acoperire minimală* $\mathcal{MCF}(\gamma)$ *prin identificarea nodurilor cu aceeaşi etichetă.*
iii) Graful de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$ *este unic. (Justificare: deoarece* $\mathcal{MCG}(\gamma)$ *este unic determinat de mulţimea nodurilor,* $MCS(\gamma)$*, şi de mulţimea arcelor etichetate,* E*, formată doar din arcele de tip (1).)*

Rezultatul central din articolul [22] este următorul:

Teorema 3.1.2 *Graful de acoperire minimal* $\mathcal{MCG}(\gamma)$ *este unic, finit şi calculabil pentru clasa mPTN.*

Demonstraţie. Unicitatea rezultă din observaţia precedentă, iar faptul că este finit şi calculabil este demonstrat de A. Finkel în [22], prin intermediul unui algoritm care construieşte graful de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$. $\square$

Corolarul 3.1.3 *Mulţimea de acoperire minimală* $MCS(\gamma)$ *este unică, finită şi calculabilă pentru clasa mPTN.*

Demonstraţie. Rezultă din teorema anterioară, datorită faptului că $MCS(\gamma)$ este chiar mulţimea nodurilor grafului $\mathcal{MCG}(\gamma)$. $\square$

În lucrarea amintită ([22]), A. Finkel a evidenţiat importanţa practică deosebită a structurilor de acoperire minimale, arătând că dimensiunea arborelui de acoperire minimal este mult mai mică (cu cîteva ordine de mărime, în general) decît dimensiunea arborelui de acoperire Karp–Miller, ceea ce este foarte util din punct de vedere practic pentru algoritmii de rezolvare a problemelor de decizie decidabile pe baza structurilor de acoperire, pe care le vom vedea în continuare.

3.1.4 Probleme decidabile pe baza structurilor de acoperire

În această subsecţiune voi specifica care dintre problemele de decizie pentru reţele Petri P/T prezentate în subsecţiunea 1.1.2 din capitolul 1, sunt decidabile pe baza structurilor de acoperire (atît a celor de tip Karp–Miller, cît şi a celor minimale).

Şi anume, problemele (CP) şi (QLP), (FRSP), (FRTP), (BP), (SUbP) şi (RegP) sunt toate decidabile utilizînd arborele de acoperire Karp–Miller $\mathcal{KMT}(\gamma)$ (vezi [51], [83], [106], [48]). Mai mult, toate aceste probleme sunt rezolvabile nu numai pe baza arborelui de acoperire Karp–Miller, ci şi pe baza grafului de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$ (vezi [22]), ceea ce are o importanţă practică deosebită, după cum am amintit în subsecţiunea anterioară.

În continuare voi prezenta algoritmii de rezolvare a problemelor de decizie enumerate mai sus, algoritmi ce utilizează fie arborele (sau graful) de acoperire Karp–Miller, fie graful de acoperire minimal.

I) Algoritmi de rezolvare pe baza arborelui/grafului de acoperire Karp–Miller

Următorul rezultat stabileşte modul de rezolvare a problemelor enumerate mai sus folosind structurile de acoperire Karp–Miller.

Teorema 3.1.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o mPTN şi $\mathcal{KMT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de acoperire Karp–Miller. Au loc următoarele afirmaţii:*

(1) Problema (CP): o marcare M este acoperibilă dacă şi numai dacă $\exists\, v \in V$ astfel încât $M \leq l_V(v)$;

(2) Problema (QLP): o tranziţie t este pseudo-viabilă dacă şi numai dacă $\exists\, v \in V$ astfel încât $t^- \leq l_V(v)$, sau echivalent, dacă şi numai dacă $\exists\, (v, v') \in E$ astfel încât $l_E(v, v') = t$;

(3) Problema (FRSP): mulţimea $RS(\gamma)$ este infinită dacă şi numai dacă $\exists\, v \in V$ şi $\exists\, s \in S$ astfel încât $l_V(v)(s) = \omega$;

(4) Problema (BP): o locaţie $s \in S$ este nemărginită dacă şi numai dacă $\exists\, v \in V$ astfel încât $l_V(v)(s) = \omega$;

(5) Problema (SUbP): o mulţime de locaţii $S' \subseteq S$ este simultan nemărginită dacă şi numai dacă $\exists\, v \in V$ astfel încât $l_V(v)(s) = \omega, \forall\, s \in S'$.

Afirmaţii analoage cu (1)-(5) au loc utilizând graful de acoperire Karp–Miller în loc de arborele de acoperire Karp–Miller. În plus:

(6) Problema (FRTP): arborele de accesibilitate $\mathcal{RT}(\gamma)$ este infinit dacă şi numai dacă există cel puţin un circuit în graful $\mathcal{KMG}(\gamma)$;

(7) Problema (RegP): limbajul $L(\gamma)$ este regulat dacă şi numai dacă orice circuit elementar în graful $\mathcal{KMG}(\gamma)$ ce conţine măcar o marcare maximală, este etichetat cu o secvenţă de tranziţie $w \in T^*$ astfel încât $\Delta w \geq 0$.

Demonstraţie. Demonstraţiile afirmaţiilor (1), (2), (3) şi (4) pot fi găsite în [51], [83], sau în [48] (pentru ultima lucrare, vezi şi teorema 3.1.1, corolarul 3.1.2 şi propoziţia 3.1.4 din subsecţiunea 3.1.2). Pentru afirmaţia (5) se poate consulta [10]. Demonstraţia afirmaţiei (6) poate fi găsită în [51] şi [106], iar cea a afirmaţiei (7) poate fi găsită în [106]. $\square$

II) Algoritmi de rezolvare pe baza structurilor de acoperire minimale

Următoarele rezultate stabilesc modul de rezolvare a problemelor de decizie specificate mai devreme folosind structurile de acoperire minimale.

Teorema 3.1.4 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o mPTN şi $MCS(\gamma)$ mulţimea ei de acoperire minimală. Au loc următoarele afirmaţii:*

(1) Problema (CP): o marcare M este acoperibilă dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M \leq M'$;

(2) Problema (QLP): o tranziţie t este pseudo-viabilă dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $t^- \leq M'$;

(3) Problema (FRSP): mulţimea $RS(\gamma)$ este infinită dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ şi $\exists\, s \in S$ astfel încât $M'(s) = \omega$;

(4) Problema (BP): o locaţie $s \in S$ este nemărginită dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega$;

(5) Problema (SUbP): o mulţime de locaţii $S' \subseteq S$ este simultan nemărginită dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega, \forall\, s \in S'$.

Demonstraţie. Demonstraţia acestei teoreme (afirmaţiile (2), (3) şi (4)) poate fi găsită în [22]. Mai rămîne de justificat afirmaţiile (1) şi (5).

(1) $\Rightarrow$ Fie M o marcare acoperibilă în γ. Prin urmare, există o marcare accesibilă $M_1 \in RS(\gamma)$ astfel încât $M \leq M_1$. Deoarece $MCS(\gamma)$ este mulţime de acoperire pentru γ, pentru $M_1 \in RS(\gamma)$ există $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M_1 \leq M'$. Prin urmare, $M \leq M'$.

(1) $\Leftarrow$ Fie M o marcare oarecare a reţelei γ astfel încât există o marcare $M' \in MCS(\gamma)$ cu $M \leq M'$. Dacă $M' \in RS(\gamma)$, atunci rezultă că M este acoperibilă. Să considerăm deci cazul opus, $M' \notin RS(\gamma)$.

Deoarece $M' \in MCS(\gamma) - RS(\gamma)$, din condiţia (2) din definiţia unei mulţimi de acoperire deducem că există un şir strict crescător de marcări accesibile $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ convergent la M'. Cum $M \leq M'$, rezultă că există un $n \geq 0$ astfel încât $M \leq M_n$, şi prin urmare M este acoperibilă.

Într-adevăr, în caz contrar am avea $M > M_n$ pentru orice $n \geq 0$. Trecînd la limită, am obţine $M \geq \lim M_n = M'$, care împreună cu ipoteza $M \leq M'$ conduce la $M = M'$, ceea ce este imposibil. Aceasta deoarece $\Omega(M) = \emptyset$ şi $\Omega(M') \neq \emptyset$ (justificare: deoarece reţelele P/T le-am considerat finite, deci marcările au un număr finit de componente, iar M' este limita unui şir strict crescător de marcări accesibile, rezultă că M' are cel puţin o ω-componentă).

(5) $\Rightarrow$ Fie $S' \subseteq S$ o mulţime de locaţii simultan nemărginită. Pentru orice $s \in S'$, să notăm cu $V(s) = \{M'(s) \mid M' \in MCS(\gamma), M'(s) \neq \omega\} \subseteq \mathbb{N}$ mulţimea valorilor finite ale marcărilor din mulţimea de acoperire minimală pentru locaţia s. Aceste mulţimi $V(s)$, cu $s \in S'$, sunt finite, deoarece $MCS(\gamma)$ este finită, şi prin urmare putem defini numerele $k(s) \in \mathbb{N}$ prin:

$$k(s) = \begin{cases} \max V(s) & \text{, dacă } V(s) \neq \emptyset \\ 0 & \text{, altfel} \end{cases},$$

pentru orice $s \in S'$. Deci $k(s)$ este cel mai mare număr din mulţimea $V(s)$. Alegem acum numărul $k = 1 + \max\{k(s) \mid s \in S'\} \in \mathbb{N}$.

Presupunem prin reducere la absurd că nu există $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega, \forall s \in S'$. Prin urmare, pentru orice $M' \in MCS(\gamma)$ există o locaţie $s_{M'} \in S'$ astfel încât $M'(s_{M'}) \neq \omega$. Rezultă că $M'(s_{M'}) \in V(s_{M'})$, deci $M'(s_{M'}) \leq k(s_{M'})$. Dar din modul de alegere a lui k avem $k > k(s_{M'})$ şi deci $M'(s_{M'}) < k$.

Deoarece S' este simultan nemărginită, pentru acest număr k ales, există o marcare accesibilă $M_k \in RS(\gamma)$ astfel încât $M_k(s) \geq k, \forall s \in S'$.

Rezultă că pentru orice $M' \in MCS(\gamma)$ avem $M'(s_{M'}) < k \leq M_k(s_{M'})$, ceea ce înseamnă că $M_k \not\leq M'$. Deci nu putem avea $M_k \leq M'$ pentru nici o marcare $M' \in MCS(\gamma)$, ceea ce contrazice faptul că $MCS(\gamma)$ este mulţime de acoperire (mai exact, contrazice condiţia (1) din definiţia mulţimii de acoperire). Aşadar presupunerea făcută este falsă, deci există $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega, \forall s \in S'$.

(5) $\Leftarrow$ Fie $S' \subseteq S$ o mulţime de locaţii astfel încât există o marcare $M' \in MCS(\gamma)$ cu $M'(s) = \omega, \forall s \in S'$. Prin urmare, $M' \in MCS(\gamma) - RS(\gamma)$, şi din condiţia (2) din definiţia unei mulţimi de acoperire deducem că există un şir strict crescător de marcări accesibile $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ convergent la M'. Deoarece $S' \subseteq \Omega(M')$, din definiţia limitei deducem că $M_n(s) \geq n$, pentru orice $s \in S'$, şi pentru orice $n \geq 0$. Prin urmare, mulţimea de locaţii S' este simultan nemărginită. $\square$

Teorema 3.1.5 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o mPTN şi $\mathcal{MCG}(\gamma) = (MCS(\gamma), T, E)$ graful ei de acoperire minimal. Au loc următoarele afirmaţii:*

(1) Problema (CP): o marcare M este acoperibilă dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M \leq M'$;

(2) Problema (QLP): o tranziţie t este pseudo-viabilă dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $t^- \leq M'$, sau echivalent, dacă şi numai dacă $\exists\,(v, v') \in E$ astfel încât $l_E(v, v') = t$;

(3) Problema (FRSP): mulţimea $RS(\gamma)$ este infinită dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(\gamma)$ şi $\exists\, s \in S$ astfel încât $M'(s) = \omega$;

(4) Problema (BP): o locaţie $s \in S$ este nemărginită dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega$;

(5) Problema (SUbP): o mulţime de locaţii $S' \subseteq S$ este simultan nemărginită dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega, \forall\, s \in S'$;

(6) Problema (FRTP): arborele de accesibilitate $\mathcal{RT}(\gamma)$ este infinit dacă şi numai dacă există cel puţin un circuit în graful $\mathcal{MCG}(\gamma)$;

(7) Problema (RegP): limbajul $L(\gamma)$ este regulat dacă şi numai dacă orice circuit elementar în graful $\mathcal{MCG}(\gamma)$ este etichetat cu o secvenţă de tranziţie $w \in T^*$ astfel încât $\Delta w \geq 0$.

Demonstraţie. Demonstraţia acestei teoreme (afirmaţiile (2), (3), (4), (6) şi (7)) poate fi găsită în [22]. Pentru (1) şi (5) vezi afirmaţiile (1) şi (5) din teorema precedentă. □

3.1.5 Cazul reţelelor P/T cu marcări iniţiale infinite

În această subsecţiune voi discuta despre reţele P/T cu marcări iniţiale infinite, şi voi defini structuri de acoperire pentru ele, deoarece le voi utiliza în secţiunea următoare pentru a putea defini structuri de acoperire pentru reţele Petri cu salturi.

Definiţia 3.1.9 *O* reţea P/T marcată cu o marcare iniţială infinită *este o mPTN $\gamma = (\Sigma, M_0)$ astfel încât marcarea iniţială are ω-componente, i.e. $M_0 \in \mathbb{N}_\omega^S - \mathbb{N}^S$ (sau, echivalent, $\Omega(M_0) \neq \emptyset$).*

Toate noţiunile de la reţele P/T cu marcări iniţiale finite (i.e. regula de tranziţie, secvenţă de tranziţie, mulţimea $TS(\gamma, M)$ a secvenţelor de tranziţie de la o marcare M, marcare accesibilă, mulţimea de accesibilitate $RS(\gamma)$, arborele de accesibilitate $\mathcal{RT}(\gamma)$, graful de accesibilitate $\mathcal{RG}(\gamma)$, marcare acoperibilă, locaţie mărginită, reţea mărginită, mulţime de locaţii simultan nemărginită, tranziţie pseudo-viabilă, reţea pseudo-viabilă, tranziţie viabilă, reţea viabilă, limbajul generat, etc.), şi toate problemele de decizie asociate (i.e. (RP), (FRSP), (FRTP), (BP), (SUbP), (CP), (QLP), (LP) and (RegP)) se definesc similar pentru reţele P/T cu marcări iniţiale infinite, cu singura observaţie că marcarea iniţială M_0 este de fapt o pseudo-marcare (deoarece M_0 are ω-componente), şi, în consecinţă, toate marcările accesibile ale lui γ sunt de fapt pseudo-marcări. Într-adevăr, este uşor de remarcat faptul că

$$\Omega(M) = \Omega(M_0)\,, \forall\, M \in RS(\gamma) \ ,$$

ceea ce înseamnă că ω-componentele marcării M_0 sunt păstrate de regula de tranziţie. Ca o consecinţă, toate locaţiile $s \in \Omega(M_0)$ sunt nemărginite şi, prin urmare, reţeaua γ este nemărginită.

Mai mult, fiecărei reţele P/T marcate cu o marcare iniţială infinită, γ, i se poate asocia o reţea P/T marcată cu o marcare iniţială finită, γ', ce este echivalentă cu γ din punct de vedere al comportamentului, asociere realizată în felul următor:

Notaţia 3.1.4 *Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T, şi $S' \subseteq S$ o mulţime de locaţii ale lui Σ.*
i) Proiecţia *relaţiei de flux F pe S' este relaţia $F|_{S'} \subseteq (S' \times T) \cup (T \times S')$ definită prin $F|_{S'} = F \cap ((S' \times T) \cup (T \times S'))$.*
ii) Proiecţia *funcţiei de pondere W pe S' este funcţia $W|_{S'} : (S' \times T) \cup (T \times S') \to \mathbb{N}$ definită prin $W|_{S'}(x, y) = W(x, y)$, $\forall\,(x, y) \in (S' \times T) \cup (T \times S')$.*
iii) Proiecţia *unei pseudo-marcări $M : S \to \mathbb{N}_\omega$ pe S' este funcţia (pseudo-marcarea) $M|_{S'} : S' \to \mathbb{N}_\omega$ definită prin $M|_{S'}(s) = M(s)\,, \forall\, s \in S'$.*
iv) Funcţia proiecţie *pe S', $pr_{S'} : \mathbb{N}_\omega^S \to \mathbb{N}_\omega^{S'}$, definită prin $pr_{S'}(M) = M|_{S'}\,,$ pentru orice $M \in \mathbb{N}_\omega^S$, denotă funcţia ce asociază fiecărei pseudo-marcări proiecţia sa pe S'. Ea se poate extinde la mulţimi de pseudo-marcări în modul uzual: $pr_{S'}(A) = \{pr_{S'}(M) \mid M \in A\}$, pentru orice $A \subseteq \mathbb{N}_\omega^S$.*

Definiţia 3.1.10 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$, unde $\Sigma = (S, T, F, W)$, o reţea P/T marcată cu o marcare iniţială infinită. Vom nota prin $S_{fin} = S - \Omega(M_0)$ mulţimea componentelor finite ale lui M_0, prin $M_{fin} = M|_{S_{fin}}$ proiecţia unei pseudo-marcări M pe S_{fin}, şi prin $pr_{fin} = pr_{S_{fin}}$ funcţia proiecţie pe S_{fin}.*

Reţeaua P/T marcată cu o marcare iniţială finită asociată *reţelei γ, este reţeaua P/T $\gamma_{fin} = (\Sigma', M_{0fin})$, unde $\Sigma' = (S_{fin}, T, F|_{S_{fin}}, W|_{S_{fin}})$.*

Faptul că reţeaua asociată este echivalentă cu γ din punct de vedere al comportamentului, este specificat de următorul rezultat.

Propoziţia 3.1.7 *Fie γ şi γ_{fin} ca mai sus. Au loc următoarele proprietăţi:*

(i) $M_1\,[t\rangle_\gamma\, M_2 \quad \Leftrightarrow \quad M_{1fin}\,[t\rangle_{\gamma_{fin}}\, M_{2fin}\ \ , \forall\, M_1, M_2 \in \mathbb{N}_\omega^S\,, \forall\, t \in T\,;$

(ii) $TS(\gamma) = TS(\gamma_{fin})\,;$

(iii) *pr_{fin} este injectivă pe $RS(\gamma)$ şi $pr_{fin}(RS(\gamma)) = RS(\gamma_{fin})$*
(cu alte cuvinte, funcţia proiecţie pr_{fin} acţionează bijectiv de la $RS(\gamma)$ la $RS(\gamma_{fin})$).

Demonstraţie. Aceste proprietăţi sunt simple consecinţe ale definiţiei precedente. □

Aşadar, o reţea P/T cu marcare iniţială infinită se comportă ca şi cum din structura sa ar fi *omise* locaţiile corespunzătoare ω-componentelor marcării iniţiale, împreună cu arcele etichetate incidente în aceste locaţii.

Structurile de acoperire pentru o reţea P/T marcată cu o marcare iniţială infinită se definesc ca fiind acelea ale reţelei P/T marcate cu marcări iniţiale finite asociate, avînd pseudo-marcările extinse cu ω-componente pe mulţimea ω-componentelor marcării iniţiale:

Definiţia 3.1.11 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$, unde $\Sigma = (S, T, F, W)$, o reţea P/T marcată cu o marcare iniţială infinită.*
i) O mulţime de acoperire (minimală) *pentru γ este orice mulţime de pseudo-marcări $CS(\gamma) \subseteq \mathbb{N}_\omega^S$, astfel încât $pr_{fin}(CS(\gamma))$ este o mulţime de acoperire (minimală) pentru reţeaua asociată γ_{fin} şi $M(s) = \omega\,, \forall\, s \in \Omega(M_0)\,, \forall\, M \in CS(\gamma)$.*
ii) Un arbore *(o* pădure*, respectiv un* graf*)* de acoperire (minimal) *pentru γ este definit exact la fel ca cel al unei mPTN cu o marcare iniţială finită (a se vedea definiţiile respective din subsecţiunea 3.1.3), prin folosirea noţiunii de mulţime de acoperire (minimală) definită mai sus, în locul celei pentru mPTN cu o marcare iniţială finită.*

Este uşor de verificat faptul că algoritmul lui Finkel de construire a grafului de acoperire minimal pentru reţele P/T descris în [22] rămîne valabil şi în cazul unei reţele P/T cu o marcare iniţială infinită, şi, mai mult, că rezultatele acestuia referitoare la mulţimea şi graful de acoperire minimale ale unei reţele P/T din lucrarea [22] sunt valabile şi în cazul unei reţele P/T cu o marcare iniţială infinită:

Teorema 3.1.6 *Pentru fiecare mPTN γ cu o marcare iniţială infinită,*

i) există o unică, finită şi calculabilă mulţime de acoperire minimală, denotată prin $MCS(\gamma)$,
ii) şi există un unic, finit şi calculabil graf de acoperire minimal, denotat prin $\mathcal{MCG}(\gamma)$.

Demonstraţie. Aceste afirmaţii sunt simple consecinţe ale definiţiei 3.1.11 şi ale rezultatelor similare pentru reţele P/T cu marcări iniţiale finite din lucrarea [22]. $\square$

Să mai observăm faptul că se poate folosi graful de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$ al unei *mPTN* γ cu o marcare iniţială infinită, pentru a rezolva aceleaşi probleme de decizie ca şi cele rezolvate pentru reţele P/T cu marcări iniţiale finite. Într-adevăr, avem următoarele rezultate:

Propoziţia 3.1.8 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$, unde $\Sigma = (S, T, F, W)$, o reţea P/T marcată cu o marcare iniţială infinită, şi fie γ_{fin} reţeaua cu marcare iniţială finită asociată lui γ. Au loc următoarele afirmaţii:*

(i) O locaţie $s \in S_{fin}$ este nemărginită în γ dacă şi numai dacă s este nemărginită în γ_{fin}.
(În plus, toate locaţiile $s \in S - S_{fin}$ sunt nemărginite în γ.)

(ii) O mulţime de locaţii $S' \subseteq S$ este simultan nemărginită în γ dacă şi numai dacă mulţimea $S' \cap S_{fin}$ este simultan nemărginită în γ_{fin}.

(iii) Mulţimea de accesibilitate a lui γ, $RS(\gamma)$, este infinită dacă şi numai dacă mulţimea de accesibilitate a lui γ_{fin}, $RS(\gamma_{fin})$, este infinită.

(iv) O marcare M este acoperibilă în γ dacă şi numai dacă marcarea M_{fin} este acoperibilă în γ_{fin}.

(v) O tranziţie t este pseudo-viabilă în γ dacă şi numai dacă t este pseudo-viabilă în γ_{fin}.

Demonstraţie. Aceste afirmaţii rezultă imediat de la definiţia 3.1.10 şi propoziţia 3.1.7. $\square$

Teorema 3.1.7 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată (cu o marcare iniţială finită sau infinită), şi $\mathcal{MCG}(\gamma)$ graful său de acoperire minimal. Au loc următoarele afirmaţii:*

(1) O locaţie s este nemărginită dacă şi numai dacă există cel puţin un nod M în $\mathcal{MCG}(\gamma)$ astfel încât $M(s) = \omega$;

(2) *O mulţime de locaţii S' este simultan nemărginită dacă şi numai dacă există cel puţin un nod M în $\mathcal{MCG}(\gamma)$ astfel încât $M(s) = \omega$, pentru orice $s \in S'$;*

(3) *Mulţimea de accesibilitate a lui γ, $RS(\gamma)$, este infinită dacă şi numai dacă există cel puţin un nod M în $\mathcal{MCG}(\gamma)$ astfel încât M_{fin} conţine cel puţin un simbol ω (i.e. $\Omega(M_{fin}) \neq \emptyset$);*

(4) *O marcare M este acoperibilă dacă şi numai dacă există cel puţin un nod M' în $\mathcal{MCG}(\gamma)$ cu $M \leq M'$.*

(5) *O tranziţie t este pseudo-viabilă dacă şi numai dacă există cel puţin un nod M în $\mathcal{MCG}(\gamma)$ astfel încât $t^- \leq M$, sau, echivalent, dacă şi numai dacă există cel puţin un arc etichetat cu t în $\mathcal{MCG}(\gamma)$.*

Demonstraţie. Dacă reţeaua γ are o marcare iniţială finită, atunci afirmaţiile acestei teoreme reprezintă tocmai rezultatul lui A. Finkel pentru reţele P/T din [22]. Altfel, dacă γ este o reţea P/T cu o marcare iniţială infinită, atunci afirmaţiile (1) – (5) rezultă imediat de la definiţia grafului de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$ (definiţia 3.1.11, ii)), de la propoziţia precedentă (propoziţia 3.1.8), şi de la rezultatul similar pentru reţele P/T cu marcări iniţiale finite ([22]). $\square$

Corolarul 3.1.4 *Problemele (BP), (SUbP), (FRSP), (CP) şi (QLP) sunt decidabile pentru reţele P/T cu marcări iniţiale infinite.*

Demonstraţie. Pe baza teoremei precedente şi a teoremei 3.1.6, rezultă că toate aceste probleme sunt rezolvabile cu ajutorul grafului de acoperire minimal. $\square$

3.2 Structuri de acoperire pentru reţele Petri cu salturi

În prima subsecţiune din această secţiune voi prezenta structurile de j-accesibilitate, definite întîia oară în lucrarea (Vidraşcu & Jucan [126]), iar în a doua subsecţiune voi face o trecere în revistă a structurilor de acoperire de tip Karp–Miller pentru reţele Petri cu salturi, urmând în principal prezentarea acestora făcută în lucrarea [48]. Iar în a treia subsecţiune voi prezenta structurile de acoperire minimale pentru reţele Petri cu salturi, pe baza rezultatelor originale din lucrarea (Vidraşcu & Jucan [126]).

Apoi, în ultima subsecţiune, voi prezenta problemele de decizie care sunt decidabile pentru reţelele cu salturi, atît pe baza structurilor de acoperire de tip Karp–Miller, cît şi pe baza structurilor de acoperire minimale. Aceste rezultate originale au fost publicate în lucrarea (Vidraşcu & Jucan [128]).

Se cuvine menţionat faptul că articolul [126] şi raportul tehnic [128] sunt, în parte, rodul unui stagiu de pregătire de 3 luni pe care l-am desfăşurat în 1999 la Facultatea de Informatică a Universităţii din Hamburg, Germania.

De asemenea, o sinteză a rezultatelor din această secţiune a fost prezentată la şcoala de vară MOVEP 2000 desfăşurată la Nantes, Franţa ([110]).

3.2.1 Structuri de j-accesibilitate

După cum am văzut în secţiunea 3.1, modelarea sistemelor concurente prin intermediul reţelelor P/T a condus la necesitatea investigării mulţimii tuturor marcărilor accesibile ale unei reţele P/T marcate. De la definiţia acestei mulţimi urmează că se poate construi un arbore numit, în mod curent, arborele de accesibilitate al reţelei.

Pentru reţelele Petri cu salturi, *arborele de j-accesibilitate* l-am definit analog ca la reţele P/T, adăugînd în plus şi arce pentru toate salturile $(M, M') \in R$. Mai exact, acesta este un arbore ale cărui noduri sunt etichetate cu marcări, ale cărui arce sunt etichetate cu tranziţii sau cu "j" (pentru salturi) şi astfel încât :

(1) rădăcina v_0 a arborelui să fie etichetată cu marcarea iniţială a reţelei;

(2) dacă v este un nod al arborelui, etichetat cu o marcare M, atunci pentru orice $t \in T$ astfel încât $M[t\rangle$ există un nod distinct v' etichetat cu $M' = M + \Delta t$, şi, respectiv, pentru orice salt $(M, M') \in R$, există un nod distinct v' etichetat cu M' ; în plus, există arcul (v, v'), ce este etichetat cu t, respectiv cu "j".

Definiţia 3.2.1 *Se numeşte* arbore de j-accesibilitate *al unei reţele cu salturi marcate* $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$, *orice arbore* $(\mathbb{N}^S, T \cup \{j\})$*-etichetat* $\mathcal{RT} = (V, E, l_V, l_E)$ *cu următoarele proprietăţi:*

(i) *rădăcina lui, notată* v_0, *este etichetată cu* M_0, *adică* $l_V(v_0) = M_0$;

(ii) *pentru orice nod* $v \in V$, $|v^+| = |T(\Sigma, l_V(v))| + |\{M \mid (l_V(v), M) \in R\}|$;

(iii) *pentru orice* $v \in V$ *cu* $|v^+| > 0$ *şi orice* $t \in T(\Sigma, l_V(v))$ *există* $v' \in v^+$ *astfel încât:*

- *(iii.1)* $(v, v') \in E$;
- *(iii.2)* $l_V(v') = l_V(v) + \Delta t$;
- *(iii.3)* $l_E(v, v') = t$.

(iv) *pentru orice* $v \in V$ *cu* $|v^+| > 0$ *şi orice* $M' \in \{M \mid (l_V(v), M) \in R\}$ *există* $v' \in v^+$ *astfel încât:*

- *(iii.1)* $(v, v') \in E$;
- *(iii.2)* $l_V(v') = M'$;
- *(iii.3)* $l_E(v, v') = j$.

Este uşor de văzut că dacă $\mathcal{RT}$ şi $\mathcal{RT}'$ sunt doi arbori de j-accesibilitate ai unei reţele cu salturi marcate γ, atunci ei sunt izomorfi. Din acest motiv putem vorbi de arborele de j-accesibilitate al unei reţele cu salturi marcate γ, arbore ce va fi notat prin $\mathcal{RT}(\gamma)$. Aşadar,

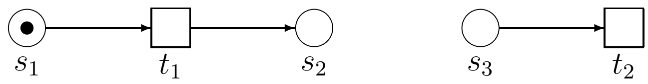
Observaţia 3.2.1 *Arborele de j-accesibilitate* $\mathcal{RT}(\gamma)$ *este unic (via izomorfismul de arbori* $(\mathbb{N}^S, T \cup \{j\})$*-etichetaţi).*

Proprietăţile de bază ale arborelui de j-accesibilitate sunt date de următoarea propoziţie a cărei demonstraţie este imediată de la definiţii.

Propoziţia 3.2.1 *Fie* $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ *o mJPTN şi* $\mathcal{RT}(\gamma) = (V, E, l_V, l_E)$ *arborele de j-accesibilitate al reţelei* γ. *Atunci, au loc următoarele proprietăţi:*

(1) $\mathcal{RT}(\gamma)$ *este finit ramificat dacă şi numai dacă mulţimea de salturi* R *este "finit ramificată" (adică: pentru orice* $M \in \mathbb{N}^S$, *mulţimea* $\{M' \mid (M, M') \in R\}$ *este finită);*

(2) *un nod* v *al arborelui* $\mathcal{RT}(\gamma)$ *este nod frunză dacă şi numai dacă nu există* $t \in T$ *astfel încât* $l_V(v)\,[t\rangle_\Sigma$ *şi nu există* $M \in \mathbb{N}^S$ *astfel încât* $(l_V(v), M) \in R$;



$$R = \{ \ ((0,1,0),(0,0,n)) \mid n \geq 0\}$$

Figura 3.5: Reţeaua cu salturi din exemplul 3.2.1

(3) $RS(\gamma) = \{l_V(v) \mid v \in V\}$.

Graful de j-accesibilitate $\mathcal{RG}(\gamma)$ al unei reţele cu salturi marcate γ l-am definit analog ca la reţele P/T, ca fiind graful orientat etichetat (pe arce) obţinut din arborele de j-accesibilitate $\mathcal{RT}(\gamma)$ prin “identificarea” nodurilor avînd aceeaşi etichetă.

Definiţia 3.2.2 *Se numeşte* graful de j-accesibilitate *al unei reţele cu salturi marcate* $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$*, graful orientat etichetat* $\mathcal{RG}(\gamma) = (RS(\gamma), T, E)$*, mulţimea* E *a arcelor etichetate fiind definită prin:*

$$(M_1, t, M_2) \in E \quad \Leftrightarrow \quad M_1\,[t\rangle_\Sigma\, M_2 \ ,$$

şi

$$(M_1, j, M_2) \in E \quad \Leftrightarrow \quad (M_1, M_2) \in R \ ,$$

pentru orice $M_1, M_2 \in RS(\gamma)$*, şi orice* $t \in T$*.*

Exemplul 3.2.1 *Fie* $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ *reţeaua Petri cu salturi din figura 3.5; marcarea sa iniţială este* $M_0 = (1,0,0)$*, iar mulţimea salturilor sale este* $R = \{ \ ((0,1,0),(0,0,n)) \mid n \geq 0\}$*.*

Se observă deci că γ *este o reţea cu salturi infinite R-redusă, şi că singurele j-secvenţe de tranziţie în* γ *sunt de forma următoare:*

$$(1,0,0)\,[t_1\rangle_\Sigma\,(0,1,0)\,R\,(0,0,n)\,[t_2\rangle_\Sigma\,(0,0,n-1)\,[t_2\rangle_\Sigma \ldots [t_2\rangle_\Sigma\,(0,0,0)\,,$$

pentru orice $n \geq 0$*. Prin urmare, mulţimea tuturor j-secvenţelor de tranziţie în* γ *este* $TS(\gamma) = \{ \ t_1 \cdot t_2^n \mid n \geq 0\}$*, iar mulţimea de j-accesibilitate a reţelei* γ *este* $RS(\gamma) = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \cup \{(0,0,n) \mid n \geq 0\}$*.*

Aşadar mulţimea de j-accesibilitate este infinită. Graful de j-accesibilitate $\mathcal{RG}(\gamma)$*, care este prezentat în figura 3.6, este de asemenea infinit.*

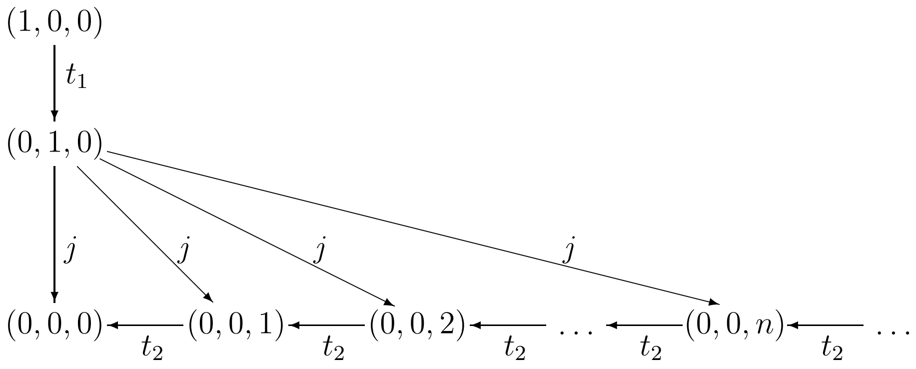


Figura 3.6: Graful de j-accesibilitate al reţelei din exemplul 3.2.1

3.2.2 Structuri de acoperire Karp–Miller

Arborele de accesibilitate al unei reţele cu salturi marcate γ poate fi infinit chiar dacă mulţimea $RS(\gamma)$ este finită. Ca urmare a acestui aspect, un studiu al mulţimii $RS(\gamma)$ prin intermediul arborelui $\mathcal{RT}(\gamma)$ este dificil de realizat. Analog ca la reţele P/T, putem însă obţine de la $\mathcal{RT}(\gamma)$ un arbore finit $\mathcal{T}(\gamma)$ fără a pierde "prea multe" informaţii despre marcările accesibile ale reţelei. Ideea este de a "trunchia" ramurile "structurate regulat" şi de a indica respectiva regularitate în eticheta frunzelor, obţinînd arbori de acoperire de tip Karp–Miller pentru reţele cu salturi.

În continuare voi trece în revistă unele *rezultate anterioare* (Jucan & Ţiplea [48], [95]) referitoare la problemele de decizie pentru reţele cu salturi şi la arbori de acoperire pentru reţele cu salturi finite:

Teorema 3.2.1 *Problemele accesibilităţii, acoperirii, mărginirii, pseudoviabilităţii şi a viabilităţii sunt nedecidabile pentru clasa reţelelor cu salturi marcate (mJPTN).*

Ideea de bază a demonstraţiei acestei teoreme este de a arăta cum reţelele cu 1-inhibiţie pot fi simulate prin reţele cu salturi, şi apoi se foloseşte nedecidabilitatea acestor probleme de decizie pentru clasa reţelelor cu 1-inhibiţie.

Teorema 3.2.2 *Problemele accesibilităţii şi reducerii sunt decidabile pentru clasa reţelelor cu salturi finite marcate (mFJPTN).*

Prin generalizarea noţiunii de arbore de acoperire de tip Karp–Miller pentru *mPTN* se introduce noţiunea de *arbore de acoperire Karp–Miller* pentru reţelele cu salturi finite (*mFJPTN*), în felul următor:

Problema accesibilităţii pentru *mFJPTN* fiind decidabilă, pentru orice *mFJPTN* γ se poate construi efectiv (modificînd doar mulţimea de salturi a lui γ) o *mFJPTN* γ' astfel încât γ' este R-redusă şi are aceeaşi putere de calcul ca şi γ.

Fie deci $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o *mFJPTN* R-redusă, avînd mulţimea de salturi nevidă şi de forma:

$$R = \{\ (M'_i, M''_i) \mid 1 \leq i \leq n\},\quad n \geq 1.$$

Notăm prin $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ următoarele *mPTN*:

$$\gamma_0 = (\Sigma, M_0) \quad \text{şi} \quad \gamma_i = (\Sigma, M''_i)\ , \forall\, 1 \leq i \leq n.$$

Definiţia 3.2.3 *Se numeşte* arborele de acoperire de tip Karp–Miller *al unei reţele cu salturi finite marcate* $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$*, tuplul:*

$$\mathcal{KMF}(\gamma) = \langle \mathcal{KMT}(\gamma_0), \mathcal{KMT}(\gamma_1), \ldots, \mathcal{KMT}(\gamma_n) \rangle\ ,$$

unde $\mathcal{KMT}(\gamma_i)$ *este arborele de acoperire de tip Karp–Miller al reţelei* γ_i*,* $\forall\, 0 \leq i \leq n$*.*

Teorema 3.2.3 *Problemele acoperirii, mărginirii, finititudinii mulţimii de accesibilitate şi a pseudo-viabilităţii sunt decidabile pentru clasa reţelelor cu salturi finite marcate (mFJPTN).*

Ideea de bază a demonstraţiei acestei teoreme este de a arăta cum fiecare problemă menţionată este decidabilă utilizînd arborele de acoperire de tip Karp–Miller definit pentru reţele cu salturi finite.

3.2.3 Structuri de acoperire minimale

În cele ce urmează voi prezenta *rezultate originale* (publicate în articolul [126], şi în raportul tehnic [128]) referitoare la o nouă subclasă de reţele cu salturi, numite *reţele cu salturi reduse-calculabile* (*mRCJPTN*), şi la modul în care putem defini structuri de acoperire pentru această subclasă (inclusiv structuri de acoperire minimale, ceea ce este o noutate şi pentru subclasa reţelelor cu salturi finite), precum şi, în subsecţiunea următoare, problemele de decizie care sunt decidabile pe baza acestor structuri de acoperire.

Mai întîi voi extinde noţiunea de *mulţime de acoperire (minimală)* de la reţele P/T la reţele cu salturi:

Definiţia 3.2.4 *i) Se numeşte* mulţime de acoperire *pentru o mJPTN* γ *orice submulţime de pseudo-marcări,* $CS(\gamma) \subseteq \mathbb{N}^S_\omega$*, care satisface următoarele două condiţii:*

(1) pentru orice marcare j-accesibilă, $M \in RS(\gamma)$, există o marcare $M' \in CS(\gamma)$ astfel încât $M \leq M'$;

(2) pentru orice marcare $M' \in CS(\gamma) - RS(\gamma)$ există un şir strict crescător de marcări j-accesibile $\{M_n\}_{n \geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ convergent la M'.

ii) O mulţime de acoperire $CS(\gamma)$ se numeşte minimală *dacă nici o submulţime proprie a lui $CS(\gamma)$ nu este mulţime de acoperire pentru reţeaua γ.*

Exemplul 3.2.2 *Mulţimea $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,\omega)\}$ este mulţime de acoperire minimală pentru reţeaua Petri cu salturi din exemplul 3.2.1.*

Mulţimile de acoperire pentru reţele Petri cu salturi au aceleaşi proprietăţi ca şi cele pentru reţele P/T:

Propoziţia 3.2.2 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea cu salturi marcată.*
a) Dacă $CS(\gamma)$ este o mulţime de acoperire pentru γ şi există $M_1, M_2 \in CS(\gamma)$, $M_1 \neq M_2$, astfel încât $M_1 \leq M_2$, atunci $CS'(\gamma) = CS(\gamma) - \{M_1\}$ este mulţime de acoperire pentru γ.
b) O mulţime de acoperire minimală nu conţine două marcări distincte comparabile.
c) Dacă $CS(\gamma)$ este o mulţime de acoperire pentru γ şi $CS'(\gamma)$ este mulţimea marcărilor maximale (în raport cu ordinea uzuală de pe $\mathbb{N}_\omega^S$) ale mulţimii $CS(\gamma)$, atunci $CS'(\gamma)$ este mulţime de acoperire minimală pentru γ.
d) Pentru orice două mulţimi de acoperire, mulţimile marcărilor maximale ale acestora coincid şi sunt egale cu mulţimea de acoperire minimală.
e) Mulţimea de acoperire minimală pentru reţeaua γ este finită şi unică, şi va fi notată cu $MCS(\gamma)$.

Demonstraţie. Demonstrarea acestor afirmaţii se face similar ca în cazul reţelelor P/T (vezi propoziţia 3.1.6). $\square$

Următorul rezultat, analog celui de la reţele P/T, stabileşte modul de rezolvare a problemelor de decizie care ne interesează folosind mulţimea de acoperire minimală.

Teorema 3.2.4 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o mJPTN şi $MCS(\gamma)$ mulţimea ei de acoperire minimală. Au loc următoarele afirmaţii:*

(1) Problema (CP): o marcare M este acoperibilă dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M \leq M'$;

(2) Problema (QLP): o tranziţie t este pseudo-viabilă dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $t^- \leq M'$;

(3) Problema (FRSP): mulţimea $RS(\gamma)$ este infinită dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ şi $\exists\, s \in S$ astfel încât $M'(s) = \omega$;

(4) Problema (BP): o locaţie $s \in S$ este nemărginită dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega$;

(5) Problema (SUbP): o mulţime de locaţii $S' \subseteq S$ este simultan nemărginită dacă şi numai dacă $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega, \forall\, s \in S'$.

Demonstraţie.

(1) $\Rightarrow$ Fie M o marcare acoperibilă în γ. Prin urmare, există o marcare j-accesibilă $M_1 \in RS(\gamma)$ astfel încât $M \leq M_1$. Deoarece $MCS(\gamma)$ este mulţime de acoperire pentru γ, pentru $M_1 \in RS(\gamma)$ există $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M_1 \leq M'$. Prin urmare, $M \leq M'$.

(1) $\Leftarrow$ Fie M o marcare oarecare a reţelei γ astfel încât există o marcare $M' \in MCS(\gamma)$ cu $M \leq M'$. Dacă $M' \in RS(\gamma)$, atunci rezultă că M este acoperibilă. Să considerăm deci cazul opus, $M' \notin RS(\gamma)$.

Deoarece $M' \in MCS(\gamma) - RS(\gamma)$, din condiţia (2) din definiţia unei mulţimi de acoperire deducem că există un şir strict crescător de marcări j-accesibile $\{M_n\}_{n \geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ convergent la M'. Cum $M \leq M'$, rezultă că există un $n \geq 0$ astfel încât $M \leq M_n$, şi prin urmare M este acoperibilă.

(Într-adevăr, în caz contrar am avea $M > M_n$ pentru orice $n \geq 0$. Trecînd la limită, am obţine $M \geq \lim M_n = M'$, care împreună cu ipoteza $M \leq M'$ conduce la $M = M'$, ceea ce este imposibil. Aceasta deoarece $\Omega(M) = \emptyset$ şi $\Omega(M') \neq \emptyset$ (justificare: deoarece reţelele au mulţimile de locaţii şi de tranziţii finite, deci marcările au un număr finit de componente, şi cum M' este limita unui şir strict crescător de marcări j-accesibile, rezultă că M' are cel puţin o ω-componentă).)

(2) Această afirmaţie rezultă imediat de la (1) şi din propoziţia 1.2.1, i), conform căreia avem că $QLP(\gamma, t) \equiv CP(\gamma, t^-)$, adică tranziţia t este pseudo-viabilă în γ dacă şi numai dacă marcarea t^- este acoperibilă în γ.

(3) $\Rightarrow$ Deci mulţimea $RS(\gamma)$ este infinită şi presupunem prin reducere la absurd că nu există $M' \in MCS(\gamma)$ şi $s \in S$ astfel încât $M'(s) = \omega$. Prin urmare, putem considera numărul natural

$$k = \max\{M'(s) \mid M' \in MCS(\gamma), s \in S\} \in \mathbb{N}\,.$$

Deoarece $RS(\gamma)$ este infinită, rezultă că există o marcare $M_1 \in RS(\gamma)$ şi există o locaţie $s_1 \in S$ astfel încât $M_1(s_1) > k$ (în caz contrar am avea

$$M(s) \leq k\,, \forall\, s \in S, \forall\, M \in RS(\gamma),$$

de unde ar rezulta că $|RS(\gamma)| \leq (k+1)^{|S|}$, deci $RS(\gamma)$ nu ar fi infinită).

De la condiţia (1) din definiţia mulţimii de acoperire rezultă că pentru M_1 există o pseudo-marcare $M'_1 \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M_1 \leq M'_1$. Din modul de alegere a lui k, rezultă că $M'_1(s) \leq k\,, \forall\, s \in S$, şi prin urmare obţinem că $M_1(s) \leq k\,, \forall\, s \in S$, ceea ce contrazice faptul că $M_1(s_1) > k$.

Aşadar presupunerea făcută este falsă, deci $\exists\, M' \in MCS(\gamma)$ şi $\exists\, s \in S$ astfel încât $M'(s) = \omega$.

(3) $\Leftarrow$ Fie $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât există $s \in S$ cu $M'(s) = \omega$. Prin urmare, $M' \notin \mathbb{N}^S$, deci $M' \notin RS(\gamma)$. De la condiţia (2) din definiţia mulţimii de acoperire rezultă că pentru M' există un şir strict crescător de marcări j-accesibile $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ ce este convergent la M'. Ca urmare, $RS(\gamma)$ conţine o infinitate de marcări distincte două cîte două, deci $RS(\gamma)$ este infinită.

(4) Această afirmaţie rezultă imediat de la (5), pe baza observaţiei simple (care rezultă direct de la definiţii) că o locaţie s este nemărginită în γ dacă şi numai dacă mulţimea de locaţii $\{s\}$ este simultan nemărginită în γ.

(5) $\Rightarrow$ Fie $S' \subseteq S$ o mulţime de locaţii simultan nemărginită. Pentru orice $s \in S'$, să notăm cu $V(s) = \{M'(s) \mid M' \in MCS(\gamma), M'(s) \neq \omega\} \subseteq \mathbb{N}$ mulţimea valorilor finite ale marcărilor din mulţimea de acoperire minimală pentru locaţia s. Aceste mulţimi $V(s)$, cu $s \in S'$, sunt finite, deoarece $MCS(\gamma)$ este finită, şi prin urmare putem defini numerele $k(s) \in \mathbb{N}$ prin:

$$k(s) = \begin{cases} \max V(s) & \text{, dacă } V(s) \neq \emptyset \\ 0 & \text{, altfel} \end{cases} ,$$

pentru orice $s \in S'$. Deci $k(s)$ este cel mai mare număr din mulţimea $V(s)$. Alegem acum numărul $k = 1 + \max\{k(s) \mid s \in S'\} \in \mathbb{N}$.

Presupunem prin reducere la absurd că nu există $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega, \forall\, s \in S'$. Prin urmare, pentru orice $M' \in MCS(\gamma)$ există o locaţie $s_{M'} \in S'$ astfel încât $M'(s_{M'}) \neq \omega$. Rezultă că $M'(s_{M'}) \in V(s_{M'})$, deci $M'(s_{M'}) \leq k(s_{M'})$. Dar din modul de alegere a lui k avem $k > k(s_{M'})$ şi deci $M'(s_{M'}) < k$.

Deoarece S' este simultan nemărginită, pentru acest număr k ales, există o marcare j-accesibilă $M_k \in RS(\gamma)$ astfel încât $M_k(s) \geq k, \forall\, s \in S'$.

Rezultă că pentru orice $M' \in MCS(\gamma)$ avem $M'(s_{M'}) < k \leq M_k(s_{M'})$, ceea ce înseamnă că $M_k \not\leq M'$. Deci nu putem avea $M_k \leq M'$ pentru nici o marcare $M' \in MCS(\gamma)$, ceea ce contrazice faptul că $MCS(\gamma)$ este mulţime de acoperire (mai exact, contrazice condiţia (1) din definiţia mulţimii de acoperire). Aşadar presupunerea făcută este falsă, deci există $M' \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M'(s) = \omega, \forall\, s \in S'$.

(5) $\Leftarrow$ Fie $S' \subseteq S$ o mulţime de locaţii astfel încât există o marcare $M' \in MCS(\gamma)$ cu $M'(s) = \omega, \forall\, s \in S'$. Prin urmare, $M' \in MCS(\gamma) - RS(\gamma)$,

şi din condiţia (2) din definiţia unei mulţimi de acoperire deducem că există un şir strict crescător de marcări j-accesibile $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ convergent la M'. Deoarece $S' \subseteq \Omega(M')$, din definiţia limitei deducem că $M_n(s) \geq n$, pentru orice $s \in S'$, şi pentru orice $n \geq 0$. Prin urmare, mulţimea de locaţii S' este simultan nemărginită. $\square$

De la teorema precedentă, se poate deduce imediat următorul corolar:

Corolarul 3.2.1 *Pentru a decide problemele (CP), (QLP), (FRSP), (BP) şi (SUbP), este suficient doar să calculăm mulţimea de acoperire minimală, pentru orice reţea cu salturi marcată.*

Mai mult, deoarece afirmaţiile din teorema precedentă au loc pentru orice mulţime de acoperire a lui γ, pentru a decide problemele enumerate mai sus este suficient să calculăm o mulţime de acoperire finită, în loc de mulţimea de acoperire minimală.

Problema acum este de a calcula (i.e. a construi) mulţimea de acoperire minimală pentru o reţea cu salturi. Deşi mulţimea de j-accesibilitate este întotdeauna mulţime de acoperire, ea nu este întotdeauna finită. Cum să construim mulţimea de acoperire minimală ce este finită?

Observaţia 3.2.2 *De la arborele de acoperire Karp–Miller definit doar pentru reţele cu salturi finite (vezi definiţia 3.2.3) se poate obţine graful de acoperire Karp–Miller prin identificarea, în fiecare componentă a tuplului, a nodurilor cu aceeaşi etichetă. Mulţimea nodurilor grafului de acoperire Karp–Miller este o mulţime de acoperire finită şi calculabilă, dar, în general, nu este chiar mulţimea de acoperire minimală. În plus, ne interesează să calculăm mulţimea de acoperire minimală pentru o clasă cît mai largă de reţele cu salturi, nu doar pentru reţelele cu salturi finite.*

În continuare voi introduce noţiunea de *arbore (pădure, respectiv graf) de acoperire (minimal)* pentru reţele Petri cu salturi (mai precis, pentru o subclasă de reţele Petri cu salturi, ce va fi definită în continuare, şi care este mai amplă decît subclasa reţelelor cu salturi finite).

Construcţia mulţimii salturilor maximale:

Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o *JPTN*, cu $R \subseteq \mathbb{N}^S \times \mathbb{N}^S$ mulţimea de salturi a lui γ. Salturile pot fi privite ca vectori $2 \cdot |S|$–dimensionali de numere întregi nenegative, şi deci putem considera că $R \subseteq \mathbb{N}^{2|S|}$.

Pentru început, să observăm că îi putem asocia reţelei $\gamma = (\Sigma, R)$ o submulţime finită de salturi $R_{\omega-max}$ care este maximală într-un sens specificat mai jos, şi care poate fi folosită în locul întregii mulţimi de salturi

R, pentru construcţia grafului de acoperire (acest fapt este util, deoarece R poate fi mulţime infinită).

Mai întîi, considerăm mulţimea "ω-salturilor" (i.e., a "punctelor de acumulare" ale mulţimii R), adică:

$$R_\omega = \{r \in \mathbb{N}_\omega^{2|S|} - \mathbb{N}^{2|S|} \mid \exists \{r_n\}_{n\geq 0} \subseteq R \text{ strict crescător cu } \lim_{n\to\infty} r_n = r\},$$

şi apoi considerăm *"ω-completata"* lui R ca fiind mulţimea:

$$\overline{R} = R \cup R_\omega.$$

Prin urmare, putem considera mulţimea salturilor maximale ale mulţimii $\overline{R}$:

$$R_{\omega-max} = maximal(\overline{R}) = \{r' \in \overline{R} \mid \forall\, r \in \overline{R} - \{r'\} : r' \not\leq r\}.$$

Definiţia 3.2.5 *Dată reţeaua cu salturi $\gamma = (\Sigma, R)$, mulţimea $R_{\omega-max}$ definită mai sus se numeşte* mulţimea de salturi ω-maximale *ale reţelei γ.*

Este cunoscut următorul rezultat despre ordinea parţială uzuală pe $\mathbb{N}^k$:

Lema 3.2.1 (Lema lui Dickson, [18])
Ordinea parţială uzuală pe $\mathbb{N}^k$ (i.e. ordinea pe componente) este o ordine parţială bună*, adică din orice şir infinit de elemente din $\mathbb{N}^k$ putem extrage un subşir infinit crescător.*

O altă proprietate a ordinii parţiale uzuale pe $\mathbb{N}^k$, proprietate de care vom avea nevoie la demonstraţia proprietăţilor mulţimii de salturi ω-maximale $R_{\omega-max}$, este următoarea:

Lema 3.2.2 *Fie $V \subseteq \mathbb{N}^k$ o mulţime arbitrară şi fie V_ω mulţimea "punctelor de acumulare" ale lui V, adică:*

$$V_\omega = \{v \in \mathbb{N}_\omega^k - \mathbb{N}^k \mid \exists \{v_n\}_{n\geq 0} \subseteq V \textit{ strict crescător cu } \lim_{n\to\infty} v_n = v\}.$$

Atunci mulţimea elementelor maximale ale mulţimii $V \cup V_\omega$, i.e.

$$V_{\omega-max} = \{v' \in V \cup V_\omega \mid \forall\, v \in V \cup V_\omega - \{v'\} : v' \not\leq v\},$$

are următoarea proprietate:

$$\forall\, v \in V \cup V_\omega, \exists\, v' \in V_{\omega-max} \textit{ astfel încât } v \leq v'.$$

Demonstraţie. Considerăm un element arbitrar $v \in V \cup V_\omega$. Sunt posibile două cazuri:

(a) $v \in V_{\omega-max}$. Atunci luăm $v' = v$ şi am încheiat demonstraţia.

(b) $v \notin V_{\omega-max}$. Rezultă că $\exists\, v_1 \in V \cup V_\omega$ astfel încât $v < v_1$ (unde $x < y$ este notaţia uzuală pentru $x \leq y$ (pe componente) şi $x \neq y$).

Pentru elementul v_1 avem aceleaşi două cazuri posibile ca şi pentru v, ş.a.m.d. Continuând acest raţionament, obţinem două situaţii posibile:

i) există un $n \geq 0$ şi secvenţa finită:

$$v = v_0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_n,$$

cu $v_i \in V \cup V_\omega - V_{\omega-max}, \forall\, 0 \leq i < n,$ şi $v_n \in V_{\omega-max}$.
În acest caz, luăm $v' = v_n$ şi am încheiat demonstraţia.

ii) există un şir infinit $\{v_n\}_{n\geq 0} \subseteq V \cup V_\omega - V_{\omega-max}$, strict crescător:

$$v = v_0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_n < v_{n+1} < \ldots$$

În cea de-a doua situaţie, procedăm în felul următor:
Fie $v^1 \in \mathbb{N}_\omega^k$ limita şirului $\{v_n\}_{n\geq 0}$, i.e.

$$v^1 = \lim_{n\to\infty} v_n$$

(limita există, în $\mathbb{N}_\omega^k$, deoarece şirul este strict crescător).
Să arătăm mai întîi că $v^1 \in V \cup V_\omega$:
Deoarece $v_n \in V \cup V_\omega, \forall\, n \geq 0$, de la definiţia mulţimii V_ω rezultă că:

$$\forall\, n \geq 0, \exists\, \{v_{n,m}\}_{m\geq 0} \subseteq V \text{ şir crescător astfel încât } \lim_{m\to\infty} v_{n,m} = v_n$$

(şirul este strict crescător dacă $v_n \in V_\omega$, respectiv este şirul constant $v_{n,m} = v_n, \forall\, m \geq 0$, dacă $v_n \in V$).
Considerând şirul "diagonal": $\{v'_n\}_{n\geq 0} \subseteq V$, cu $v'_n = v_{n,n}, \forall\, n \geq 0$, se arată uşor că:

$$\lim_{n\to\infty} v'_n = v',$$

şi prin urmare rezultă că $v^1 \in V \cup V_\omega$.
Să mai observăm faptul că v^1 are cu cel puţin o ω-componentă în plus faţă de v, adică:

$$\Omega(v) \subset \Omega(v^1),$$

unde $\Omega(x) = \{i | 1 \leq i \leq k \text{ şi } x(i) = \omega\}$ este mulţimea ω-componentelor elementului $x \in \mathbb{N}_\omega^k$, iar $x(i)$ este a i-a componentă a lui x.

Într-adevăr, $\{v_n\}_{n\geq 0}$ fiind şir infinit strict crescător, rezultă că măcar pe una din cele k componente avem o infinitate de inegalităţi stricte:

$$\exists\, 1 \leq j \leq k, \exists\, \{v_{i_n}\}_{n\geq 0} \subseteq \{v_n\}_{n\geq 0} : \quad v_{i_0}(j) < v_{i_1}(j) < \ldots < v_{i_n}(j) < \ldots$$

şi prin urmare şirul are limita ω pe componenta a j-a:

$$v^1(j) = \omega \;\text{ şi }\; v_n(j) < \omega, \forall\, n \geq 0,$$

ceea ce ne spune că $j \in \Omega(v^1) - \Omega(v)$.
Deci am găsit un $v^1 \in V \cup V_\omega$ astfel încât $v < v^1$ şi $\Omega(v) \subset \Omega(v^1)$.

În continuare, îi aplicăm lui v^1 acelaşi raţionament pe care i l-am aplicat lui v pînă aici. Astfel, fie vom găsi un $v' \in V_{\omega-max}$ cu $v^1 \leq v'$, deci rezultă $v \leq v'$ şi am încheiat demonstraţia, fie vom obţine un $v^2 \in V \cup V_\omega$ astfel încât $v^1 < v^2$ şi $\Omega(v^1) \subset \Omega(v^2)$.

Repetând acest raţionament, vom găsi în cele din urmă un $v' \in V_{\omega-max}$ cu $v \leq v'$, deoarece în caz contrar am obţine un şir infinit $\{v^n\}_{n\geq 0} \in V \cup V_\omega$ strict crescător: $v < v^1 < v^2 < \ldots < v^n < \ldots$ şi cu proprietatea că:

$$\Omega(v) \subset \Omega(v^1) \subset \Omega(v^2) \subset \ldots \subset \Omega(v^n) \subset \ldots,$$

ceea ce este imposibil (deoarece elementele v^n au k componente, fiind din $\mathbb{N}_\omega^k$, şi prin urmare putem avea cel mult k incluziuni stricte în şirul de incluziuni stricte anterior). □

Propoziţia ce urmează prezintă câteva proprietăţi de bază ale mulţimii de salturi ω-maximale ale unei reţele cu salturi.

Propoziţia 3.2.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o JPTN. Au loc următoarele afirmaţii:*
(1) $R_{\omega-max}$ este finită;
(2) $\forall\, r \in \overline{R}, \exists\, r' \in R_{\omega-max}$ astfel încât $r \leq r'$;
(3) $\forall\, r \in R_{\omega-max}, \exists\, \{r_n\}_{n\geq 0} \subseteq R$ astfel încât $\lim r_n = r$.

Demonstraţie. (1) De la definiţia mulţimii $R_{\omega-max}$ rezultă că elementele mulţimii $R_{\omega-max}$ sunt incomparabile două cîte două, şi deci nu pot fi decît în număr finit. Într-adevăr, elementele lui $R_{\omega-max}$ ce conţin ω-componente pot fi în număr de cel mult $2^{2\cdot|S|} - 1$ deoarece ele sunt incomparabile, iar elementele lui $R_{\omega-max}$ ce nu conţin ω-componente nu pot fi decît în număr finit, fapt ce rezultă pe baza lemei lui Dickson (lema 3.2.1).

(2) Această afirmaţie rezultă imediat de la definiţia mulţimii $R_{\omega-max}$ pe baza lemei 3.2.2.

(3) Fie $r \in R_{\omega-max}$ un salt ω-maximal oarecare.
Deoarece $R_{\omega-max} = maximal(\overline{R}) \subseteq \overline{R} = R \cup R_\omega$, sunt posibile două cazuri:

i) dacă $r \in R$, atunci (3) se obţine considerând şirul constant $r_n = r, \forall\, n \geq 0$;
ii) dacă $r \in R_\omega$, atunci afirmaţia (3) rezultă de la definiţia mulţimii R_ω. □

Din nefericire, deşi mulţimea $R_{\omega-max}$ este finită, totuşi nu este calculabilă întotdeauna.

Definiţia 3.2.6 *Spunem că o reţea cu salturi $\gamma = (\Sigma, R)$ este* R-calculabilă *dacă mulţimea $R_{\omega-max}$ este calculabilă.*

Notaţia 3.2.1 *Notăm cu CJPTN (mCJPTN) clasa reţelelor cu salturi (marcate) R-calculabile.*

Definiţia 3.2.7 *Spunem că o reţea cu salturi marcată $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ este* redusă-calculabilă *dacă este R-redusă şi R-calculabilă.*

Notaţia 3.2.2 *Notăm cu mRCJPTN clasa reţelelor cu salturi marcate reduse-calculabile.*

Exemplul 3.2.3 *Reţeaua Petri cu salturi γ din exemplul 3.2.1 are un singur "ω-salt", şi anume $R_\omega = \{\ ((0,1,0),(0,0,\omega))\ \}$, care este, de asemenea, şi unicul salt ω-maximal al reţelei γ, i.e.*

$$R_{\omega-max} = maximal(R \cup R_\omega) = \{\ ((0,1,0),(0,0,\omega))\ \}\,.$$

Prin urmare, reţeaua γ este o mRCJPTN.

În continuare, voi defini noţiunile de arbore, pădure şi respectiv graf de acoperire (minimal) pentru clasa reţelelor cu salturi reduse-calculabile.

Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o *mRCJPTN*, cu $R \neq \emptyset$; prin urmare, mulţimea de salturi ω-maximale este nevidă şi finită, fiind de forma:

$$R_{\omega-max} = \{\ r_i \mid 1 \leq i \leq n\},\ \text{cu}\ n \geq 1\,.$$

Fie $r_i = (M_i', M_i'')$, pentru fiecare $1 \leq i \leq n$. Urmînd aceeaşi abordare ca în [95], reţelei γ îi asociem următoarele reţele P/T marcate:

$$\gamma_0 = (\Sigma, M_0) \quad \text{şi} \quad \gamma_i = (\Sigma, M_i''),\ \text{pentru fiecare}\ 1 \leq i \leq n\,,$$

şi vom defini structurile de acoperire (arbori, păduri, şi respectiv grafuri de acoperire) ale reţelei γ ca fiind $(n+1)$-uplul structurilor de acoperire corespunzătoare ale reţelelor P/T $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ asociate reţelei γ.

Să remarcăm faptul că reţelele $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sunt unic determinate pentru reţeaua γ, deoarece mulţimea $R_{\omega-max}$ este unic determinată de γ.

De asemenea, să mai remarcăm faptul că, pentru fiecare $1 \leq i \leq n$, dacă $r_i \in R_{\omega-max} \cap R$ (i.e. saltul r_i nu are ω-componente), atunci $M'_i, M''_i \in RS(\gamma)$ (i.e. M'_i, M''_i sunt marcări j-accesibile ale lui γ) deoarece γ este o reţea cu salturi R-redusă. În plus, este posibil ca $r_i \in R_{\omega-max} \cap R_\omega$ (i.e. saltul r_i are ω-componente) şi, mai mult, ca $\Omega(M''_i) \neq \emptyset$, ceea ce înseamnă că unele dintre P/T-reţelele $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ pot avea marcări iniţiale cu ω-componente (a se revedea subsecţiunea 3.1.5 din prima parte a acestui capitol, despre reţele P/T cu marcări iniţiale infinite).

Definiţia 3.2.8 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o mRCJPTN, şi $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ reţelele P/T asociate ei ca mai sus.*
i) Un arbore de acoperire *pentru γ este un tuplu*

$$\mathcal{CT}(\gamma) = \langle \mathcal{CT}(\gamma_0), \mathcal{CT}(\gamma_1), \ldots, \mathcal{CT}(\gamma_n) \rangle \ ,$$

unde $\mathcal{CT}(\gamma_i)$ este un arbore de acoperire pentru γ_i, $\forall\, 0 \leq i \leq n$.
ii) Un arbore de acoperire minimal *pentru γ este un tuplu*

$$\mathcal{MCT}(\gamma) = \langle \mathcal{MCT}(\gamma_0), \mathcal{MCT}(\gamma_1), \ldots, \mathcal{MCT}(\gamma_n) \rangle \ ,$$

unde $\mathcal{MCT}(\gamma_i)$ este un arbore de acoperire minimal pentru γ_i, $\forall\, 0 \leq i \leq n$.

Observaţia 3.2.3 *$\mathcal{MCT}(\gamma)$ nu este neapărat unic. (Justificare: pe baza observaţiei 3.1.3 de la reţele P/T.)*

Definiţia 3.2.9 *i) O* pădure de acoperire *pentru γ este un tuplu*

$$\mathcal{CF}(\gamma) = \langle \mathcal{CF}(\gamma_0), \mathcal{CF}(\gamma_1), \ldots, \mathcal{CF}(\gamma_n) \rangle \ ,$$

unde $\mathcal{CF}(\gamma_i)$ este o pădure de acoperire pentru γ_i, $\forall\, 0 \leq i \leq n$.
ii) Pădurea de acoperire minimală *pentru γ este tuplul*

$$\mathcal{MCF}(\gamma) = \langle \mathcal{MCF}(\gamma_0), \mathcal{MCF}(\gamma_1), \ldots, \mathcal{MCF}(\gamma_n) \rangle \ ,$$

unde $\mathcal{MCF}(\gamma_i)$ este pădurea de acoperire minimală pentru γ_i, $\forall\, 0 \leq i \leq n$.

Observaţia 3.2.4 *i) fiecare $\mathcal{CF}(\gamma)$ se obţine dintr-un $\mathcal{CT}(\gamma)$ prin eliminarea tuturor arcelor de tip (2).*
ii) $\mathcal{MCF}(\gamma)$ se obţine din orice arbore de acoperire minimal $\mathcal{MCT}(\gamma)$ prin eliminarea tuturor arcelor de tip (2).
iii) Pădurea de acoperire minimală $\mathcal{MCF}(\gamma)$ este unică. (Justificare: pe baza observaţiei 3.1.4 de la reţele P/T.)

$$\mathcal{MCG}(\gamma_0): \begin{tikzcd} (1,0,0) \arrow[d, "t_1"] \\ (0,1,0) \end{tikzcd} \qquad \mathcal{MCG}(\gamma_1): \begin{tikzcd} (0,0,\omega) \arrow[loop below, "t_2"] \end{tikzcd}$$

Figura 3.7: Graful de acoperire minimal al reţelei din exemplul 3.2.1

Definiţia 3.2.10 *i) Un* graf de acoperire *pentru γ este un tuplu*

$$\mathcal{CG}(\gamma) = \langle \mathcal{CG}(\gamma_0), \mathcal{CG}(\gamma_1), \dots, \mathcal{CG}(\gamma_n) \rangle \ ,$$

unde $\mathcal{CG}(\gamma_i)$ este un graf de acoperire pentru γ_i, $\forall\, 0 \leq i \leq n$.
ii) Graful de acoperire minimal *pentru γ este tuplul*

$$\mathcal{MCG}(\gamma) = \langle \mathcal{MCG}(\gamma_0), \mathcal{MCG}(\gamma_1), \dots, \mathcal{MCG}(\gamma_n) \rangle \ ,$$

unde $\mathcal{MCG}(\gamma_i)$ este graful de acoperire minimal pentru γ_i, $\forall\, 0 \leq i \leq n$.

Observaţia 3.2.5 *i) fiecare $\mathcal{CG}(\gamma)$ se obţine dintr-un arbore de acoperire $\mathcal{CT}(\gamma)$ prin eliminarea tuturor arcelor de tip (2) şi identificarea, în fiecare componentă a tuplului, a nodurilor cu aceeşi etichetă. Sau, altfel spus, orice $\mathcal{CG}(\gamma)$ se obţine dintr-o pădure de acoperire $\mathcal{CF}(\gamma)$ prin identificarea, în fiecare componentă a tuplului, a nodurilor cu aceeaşi etichetă.*
ii) $\mathcal{MCG}(\gamma)$ se obţine din orice arbore de acoperire minimal $\mathcal{MCT}(\gamma)$ prin eliminarea arcelor de tip (2) şi identificarea, în fiecare componentă a tuplului, a nodurilor cu aceeaşi etichetă. Sau, altfel spus, $\mathcal{MCG}(\gamma)$ se obţine din pădurea de acoperire minimală $\mathcal{MCF}(\gamma)$ prin identificarea, în fiecare componentă a tuplului, a nodurilor cu aceeaşi etichetă.
iii) Graful de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$ este unic. (Justificare: pe baza observaţiei 3.1.5 de la reţele P/T.)

Exemplul 3.2.4 *Reţelele P/T asociate reţelei cu salturi γ din exemplul 3.2.1 sunt $\gamma_0 = (\Sigma, (1,0,0))$ şi $\gamma_1 = (\Sigma, (0,0,\omega))$ (ultima dintre ele este o reţea P/T cu o marcare iniţială infinită). Mulţimile lor de secvenţe de tranziţie sunt $TS(\gamma_0) = \{t_1, \lambda\}$ şi, respectiv, $TS(\gamma_1) = \{t_2^n \mid n \geq 0\}$, iar mulţimile lor de accesibilitate sunt $RS(\gamma_0) = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ şi, respectiv, $RS(\gamma_1) = \{(0,0,\omega)\}$. Graful de acoperire minimal al reţelei cu salturi γ este $\mathcal{MCG}(\gamma) = \langle \mathcal{MCG}(\gamma_0), \mathcal{MCG}(\gamma_1) \rangle$, şi este ilustrat în figura 3.7.*

În capitolul 5 voi prezenta un alt exemplu de reţea Petri cu salturi, însoţită de graful ei de j-accesibilitate şi de cel de acoperire minimal (a se vedea exemplul 5.2.1).

Rezultatul central al acestei subsecţiuni este următorul:

Teorema 3.2.5 *Graful de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$ este unic, finit şi calculabil pentru clasa mRCJPTN.*

Demonstraţie. Rezultă imediat pe baza rezultatului similar de la reţelele *mPTN*, cu marcări iniţiale finite sau infinite (vezi teorema 3.1.2 şi, respectiv, teorema 3.1.6), şi a faptului că $R_{\omega-max}$ este calculabilă şi că reţelele P/T asociate $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sunt unic determinate de reţeaua γ. □

Fie γ o *mRCJPTN*. Să observăm că prin considerarea mulţimii tuturor pseudo-marcărilor care apar ca etichete ale nodurilor într-un arbore (sau pădure) de acoperire, sau, respectiv, ca noduri într-un graf de acoperire (mai exact, în toate cele $n+1$ componente ale tuplului), obţinem o mulţime de acoperire $CS(\gamma)$, care poate să nu fie minimală chiar dacă am considerat arborele, pădurea, sau graful de acoperire minimal. Totuşi, în acest ultim caz, luând $CS(\gamma)$ ca fiind mulţimea marcărilor care apar ca noduri în graful de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$, obţinem o mulţime de acoperire finită şi calculabilă. Mai mult, pe baza propoziţiei 3.2.2, c) rezultă că elementele maximale ale acestei mulţimi $CS(\gamma)$ reprezintă chiar mulţimea de acoperire minimală a lui γ. Prin urmare, avem următorul rezultat:

Corolarul 3.2.2 *Mulţimea de acoperire minimală $MCS(\gamma)$ este unică, finită şi calculabilă pentru clasa mRCJPTN.*

În subsecţiunea următoare voi prezenta aplicaţia structurilor de acoperire (minimale) la rezolvarea problemelor de decizie asociate reţelelor cu salturi.

Acum voi prezenta cîteva subclase ale clasei de reţele *mRCJPTN*:

• O subclasă este *mFJPTN*:
Orice *mFJPTN* este R-calculabilă, şi, în plus, pentru orice *mFJPTN* γ se poate construi o altă *mFJPTN* γ' echivalentă cu ea şi R-redusă ([95]); deci γ' este o *mRCJPTN*.

Aşadar, structurile de acoperire definite pentru *mRCJPTN* şi rezultatele referitoare la ele din această subsecţiune sunt valabile şi pentru *mFJPTN*.

• O altă subclasă este *mVAS-RJPTN*:
Mai întîi, să introducem noţiunea de reţea cu VAS-salturi:

Definiţia 3.2.11 *Se numeşte reţea cu VAS-salturi, abreviat VAS-JPTN, orice reţea cu salturi $\gamma = (\Sigma, R)$ cu proprietatea că mulţimea de salturi R este mulţimea de accesibilitate a unui VAS (i.e. sistem aditiv de vectori) (salturile putând fi privite ca vectori $2 \cdot |S|$–dimensionali); sau, echivalent: există o mPTN γ' astfel încât $R = RS(\gamma')$.*

Observaţia 3.2.6 *Un* sistem aditiv de vectori *(abreviat VAS) n-dimensional este o pereche* $VAS = (v_0, V)$*, unde* $v_0 \in \mathbb{N}^n$ *şi* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq \mathbb{Z}^n$ *este o mulţime finită de vectori.* Mulţimea de accesibilitate *a sistemului* VAS *este mulţimea tuturor vectorilor de forma* $v_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_q$*, cu* $q \geq 0$*,* $u_1, \ldots, u_q \in V$*, şi* $v_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_i \geq 0\,,\ \forall\, 1 \leq i \leq q$*.*

Este binecunoscut faptul că sistemele aditive de vectori sunt echivalente cu reţelele Petri P/T ([69, 73, 52]).

Este clar că orice *VAS-JPTN* $\gamma = (\Sigma, R)$ este R-calculabilă. Într-adevăr, dacă $R = RS(\gamma')$, atunci se constată uşor că $R_{\omega-max} = MCS(\gamma')$.

Notaţia 3.2.3 *Vom abrevia cu mVAS-RJPTN reţelele VAS-JPTN marcate şi R-reduse.*

În concluzie, orice reţea *mVAS-RJPTN* este o *mRCJPTN*.

Evident, ar fi de dorit găsirea şi a altor subclase ale clasei *mRCJPTN*, subclase care să se bucure de o descriere simplă şi să fie destul de generale.

3.2.4 Probleme decidabile pe baza structurilor de acoperire

După cum am văzut în partea introductivă (în capitolul 1), pentru reţelele cu salturi se pun aceleaşi probleme de decizie ca şi pentru reţele P/T, plus altele noi (cum ar fi problema reducerii).

În subsecţiunea 3.2.2 am amintit unele rezultate anterioare (Jucan & Ţiplea [48], [95]) de decidabilitate, şi anume:

(i) Problemele (RP), (CP), (BP), (QLP) şi (LP) sunt nedecidabile pentru clasa *mJPTN* (teorema 3.2.1);

(ii) Problemele (RP), (RedP), (CP), (BP), (FRSP) şi (QLP) sunt decidabile pentru clasa *mFJPTN* (teoremele 3.2.2 şi 3.2.3).

În continuare voi prezenta *rezultate originale* (publicate în lucrarea [128]) referitoare la decidabilitatea cîtorva dintre problemele enumerate mai sus, pentru clasa de reţele *mRCJPTN*, pe baza grafului de acoperire minimal definit în subsecţiunea precedentă.

Pentru început, iată un rezultat tehnic valabil pentru reţele P/T, mai exact, o proprietate a şirurilor convergente de marcări, de care va fi nevoie în demonstraţiile rezultatelor următoare.

Propoziţia 3.2.4 *Fie Σ o reţea P/T şi $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^S$ un şir de marcări. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$, cu $M \in \mathbb{N}^S_\omega$, şi dacă $M[w\rangle_\Sigma M'$, cu $w \in T^*$, atunci există $n_0 \geq 0$ şi există un şir de marcări $\{M'_n\}_{n\geq n_0} \subseteq \mathbb{N}^S$ astfel încât*

$$M_n[w\rangle_\Sigma M'_n, \forall\, n \geq n_0, \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} M'_n = M'.$$

Demonstraţie. Procedăm prin inducţie după $k = |w|$.

Dacă $k = 0$, atunci propoziţia este trivial satisfăcută ($M' = M$ şi luăm $n_0 = 0$ şi $M'_n = M_n, \forall\, n \geq 0$).

Dacă $k = 1$, atunci $w = t$, cu $t \in T$, iar din $M[t\rangle_\Sigma M'$, deducem că $M \geq t^-$ şi $M' = M + \Delta t$. Din faptul că $\lim M_n = M$ rezultă că:

$$\forall\, n \geq 0: \quad \begin{cases} M_n(s) \geq n & ,\forall\, s \in \Omega(M), \\ M_n(s) = M(s) & ,\forall\, s \in S - \Omega(M). \end{cases}$$

Fie $n_0 = \max\{t^-(s) \mid s \in \Omega(M)\}$ şi atunci rezultă că:

$$\forall\, n \geq n_0: \quad \begin{cases} M_n(s) \geq n \geq n_0 \geq t^-(s) & ,\forall\, s \in \Omega(M), \\ M_n(s) = M(s) \geq t^-(s) & ,\forall\, s \in S - \Omega(M). \end{cases}$$

şi deci avem că $M_n \geq t^-$, pentru orice $n \geq n_0$. Prin urmare obţinem că

$$M_n\, [t\rangle_\Sigma\, M'_n\ , \forall\, n \geq n_0,$$

luând $M'_n = M_n + \Delta t$, pentru orice $n \geq n_0$. Întrucît $\lim M_n = M$, se verifică uşor faptul că $\lim M'_n = M'$.

Pasul inductiv. Fie $w = w't$, cu $|w'| = k$ şi $t \in T$. Există atunci marcarea M'' (şi anume, $M'' = M + \Delta w'$) astfel încât :

$$M\, [w'\rangle_\Sigma\, M''\, [t\rangle_\Sigma\, M'.$$

Aplicând ipoteza inductivă pentru şirul de marcări $\{M_n\}_{n\geq 0}$ pentru care $\lim M_n = M$ şi $M[w'\rangle_\Sigma M''$, rezultă că: există $n_1 \geq 0$ şi există un şir de marcări $\{M''_n\}_{n\geq n_1}$ (şi anume, $M''_n = M_n + \Delta w', \forall\, n \geq n_1$) astfel încât :

$$(*) \quad M_n\, [w'\rangle_\Sigma\, M''_n\ , \forall\, n \geq n_1, \quad \text{şi} \quad \lim M''_n = M''.$$

Considerând şirul: $\{\tilde{M}''_n\}_{n\geq 0}$, unde $\tilde{M}''_n = M''_{n+n_1}, \forall\, n \geq 0$, avem că:

$$\lim \tilde{M}''_n = \lim M''_n = M'' \quad \text{şi} \quad M''\, [t\rangle_\Sigma\, M'.$$

Prin urmare, aplicându-i acestui şir afirmaţia din propoziţie (pasul $k = 1$), rezultă că: există $n_2 \geq 0$ şi există un şir de marcări $\{\tilde{M}'_n\}_{n\geq n_2}$ (şi anume, $\tilde{M}'_n = \tilde{M}''_n + \Delta t, \forall\, n \geq n_2$) astfel încât :

$$\tilde{M}''_n\, [t\rangle_\Sigma\, \tilde{M}'_n\ , \forall\, n \geq n_2, \quad \text{şi} \quad \lim \tilde{M}'_n = M'.$$

Dar $\tilde{M}''_n = M''_{n+n_1}$, şi deci, luând $n_0 = n_1 + n_2$ şi şirul de marcări $\{M'_n\}_{n\geq n_0}$, cu $M'_n = \tilde{M}'_{n-n_1}, \forall\, n \geq n_0$, obţinem că:

$$(**) \quad M''_n\,[t\rangle_\Sigma\, M'_n\;, \forall\, n \geq n_0, \quad \text{şi} \quad \lim M'_n = M'.$$

Din $(*)$ şi $(**)$ deducem imediat că:

$$M_n\,[w\rangle_\Sigma\, M'_n\;, \forall\, n \geq n_0, \quad \text{şi} \quad \lim M'_n = M',$$

ceea ce încheie inducţia. $\square$

Rezultatul următor stabileşte legătura între o serie de proprietăţi ale unei reţele cu salturi redusă-calculabilă şi proprietăţile corespondente ale reţelelor P/T asociate ei (vezi subsecţiunea precedentă).

Propoziţia 3.2.5 *Fie γ o mRCJPTN, şi fie $s \in S$ o locaţie, $S' \subseteq S$ o mulţime de locaţii, $M \in \mathbb{N}^S$ o marcare şi $t \in T$ o tranziţie ale reţelei γ. Au loc afirmaţiile următoare:*

(i) *S' simultan nemărginită în γ $\Leftrightarrow$ $\exists\, 0 \leq i \leq n$ astfel încât S' simultan nemărginită în γ_i ;*

(ii) *s nemărginită în γ $\Leftrightarrow$ $\exists\, 0 \leq i \leq n$ astfel încât s nemărginită în γ_i ;*

(iii) *$RS(\gamma)$ infinită $\Leftrightarrow$ $\exists\, 0 \leq i \leq n$ astfel încât $RS(\gamma_i)$ infinită sau $\Omega(M''_i) \neq \emptyset$ (i.e. marcarea iniţială a reţelei γ_i are ω-componente);*

(iv) *M acoperibilă în γ $\Leftrightarrow$ $\exists\, 0 \leq i \leq n$ astfel încât M acoperibilă în γ_i ;*

(v) *t pseudo-viabilă în γ $\Leftrightarrow$ $\exists\, 0 \leq i \leq n$ astfel încât t pseudo-viabilă în γ_i ,*

unde $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ sunt reţelele P/T asociate reţelei γ.

Demonstraţie.

(i) $\Rightarrow$ Să demonstrăm întâi implicaţia în sens direct. Fie $S' \subseteq S$ simultan nemărginită în γ. Aceasta înseamnă că:

$$\forall\, k \geq 0, \exists\, M_k \in RS(\gamma) \text{ astfel încât } \forall\, s \in S', M_k(s) \geq k\;. \tag{3.1}$$

Presupunem prin reducere la absurd că S' nu este simultan nemărginită în γ_i, pentru orice $0 \leq i \leq n$. Aceasta înseamnă că:

$$\exists\, k_i \geq 0 \text{ astfel încât } \forall\, M \in RS(\gamma_i), \exists\, s_M \in S' : M(s_M) < k_i\;, \tag{3.2}$$

pentru orice $0 \leq i \leq n$.

Considerăm $k' \in \mathbb{N}$ arbitrar, satisfăcând $k' \geq \max\{k_i \mid 0 \leq i \leq n\}$; prin urmare avem $k' \geq k_i$, pentru orice $0 \leq i \leq n$.
Din relaţia (3.1), pentru $k = k'$, deducem că

$$\exists\, M_{k'} \in RS(\gamma) \text{ astfel încât } \forall\, s \in S', M_{k'}(s) \geq k' \ . \tag{3.3}$$

Deoarece $M_{k'} \in RS(\gamma)$, deosebim două cazuri posibile:

(a) $\exists\, w \in T^*$ astfel încât $M_0\, [w\rangle_\Sigma\, M_{k'}$
(adică marcarea $M_{k'}$ este accesibilă de la M_0 fără salturi).

În acest caz, rezultă că $M_{k'} \in RS(\gamma_0)$, iar din relaţia (3.3) avem că $M_{k'}(s) \geq k' \geq k_0, \forall\, s \in S'$. Aşadar, avem că

$$\exists\, M_{k'} \in RS(\gamma_0) \text{ astfel încât } \forall\, s \in S', M_{k'}(s) \geq k_0 \ ,$$

ceea ce contrazice (3.2), pentru $i = 0$.

(b) $\exists\, w_1, w_2 \in T^*$ şi $r = (M', M'') \in R$ astfel încât

$$M_0\, [w_1\rangle_{\gamma,j}\, M'\, r\, M''\, [w_2\rangle_\Sigma\, M_{k'}$$

(adică $M_{k'}$ este accesibilă de la M_0 prin salturi, r fiind ultimul salt).

În acest caz, pe baza propoziţiei 3.2.3 (2), deducem că $\exists\, 1 \leq i' \leq n$ astfel încât $r \leq r_{i'}$. Prin urmare, $M'' \leq M''_{i'}$ şi $M''_{i'}\, [w_2\rangle_\Sigma\, M'_{k'}$, unde

$$M'_{k'} = M''_{i'} + \Delta w_2 = M''_{i'} - M'' + M_{k'} \geq M_{k'} \ .$$

Rezultă deci că $M'_{k'} \in RS(\gamma_{i'})$ şi $M'_{k'}(s) \geq M_{k'}(s) \geq k' \geq k_{i'}\,, \forall\, s \in S'$. Aşadar, avem că

$$\exists\, M'_{k'} \in RS(\gamma_{i'}) \text{ astfel încât } \forall\, s \in S', M'_{k'}(s) \geq k_{i'},$$

ceea ce contrazice (3.2), pentru $i = i'$.

Aşadar, există $0 \leq i \leq n$ astfel încât S' este simultan nemărginită în γ_i.

(i) $\Leftarrow$ Să demonstrăm acum implicaţia în sens invers. Presupunem deci că există $0 \leq i \leq n$ astfel încât S' simultan nemărginită în γ_i.
Presupunem prin reducere la absurd că S' nu este simultan nemărginită în γ. Aceasta înseamnă că:

$$\exists\, k' \geq 0 \text{ astfel încât } \forall\, M \in RS(\gamma), \exists\, s_M \in S' : M(s_M) < k' \ . \tag{3.4}$$

Fie $i \in \mathbb{N}$ arbitrar, cu $0 \leq i \leq n$. Deosebim două cazuri:

(a) $r_i \in R_{\omega-max} \cap R$, adică saltul $r_i = (M'_i, M''_i)$ nu conţine ω-componente. Deoarece reţeaua γ este R-redusă, avem că $M''_i \in RS(\gamma)$, şi atunci pentru orice $M \in RS(\gamma_i)$ rezultă că $M \in RS(\gamma)$, ceea ce înseamnă că $RS(\gamma_i) \subseteq RS(\gamma)$. Prin urmare, din (3.4) rezultă că

$$\forall\, M \in RS(\gamma_i), \exists\, s_M \in S' : M(s_M) < k' \ . \tag{3.5}$$

(b) $r_i \in R_{\omega-max} \cap R_\omega$, adică saltul $r_i = (M'_i, M''_i)$ conţine ω-componente. Prin urmare, conform definiţiei mulţimii R_ω, avem:

$$\exists\, \{r_n\}_{n\geq 0} \subseteq R \text{ şir strict crescător cu } \lim_{n\to\infty} r_n = r_i \ .$$

Fie $r_n = (M'_n, M''_n)\,, \forall\, n \geq 0$.

Considerăm o (pseudo-)marcare arbitrară $M \in RS(\gamma_i)$. Avem deci:

$$\lim_{n\to\infty} M''_n = M''_i \ \text{ şi } \ M''_i[w\rangle_\Sigma M, \text{ cu } w \in T^*.$$

Pe baza propoziţiei 3.2.4 rezultă că există $n_0 \geq 0$ şi există un şir de marcări $\{M_n\}_{n\geq n_0}$ astfel încât

$$M''_n\,[w\rangle_\Sigma\, M_n\,, \forall\, n \geq n_0, \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} M_n = M.$$

Deoarece reţeaua γ este R-redusă, din faptul că $\{r_n\}_{n\geq 0} \subseteq R$ rezultă că $M''_n \in RS(\gamma), \forall\, n \geq 0$, şi, prin urmare, $M_n \in RS(\gamma), \forall\, n \geq n_0$. Atunci, din (3.4) urmează că:

$$\forall\, n \geq n_0, \exists\, s_n \in S' \ \text{ astfel încât } M_n(s_n) < k' \ ,$$

şi, deoarece din faptul că $\lim M_n = M$ rezultă că:

$$\forall\, n \geq n_0 : \ \begin{cases} M_n(s) = M(s) & , \forall\, s \in S - \Omega(M) \\ M_n(s) \geq n & , \forall\, s \in \Omega(M) \end{cases} \ ,$$

putem deduce, notând cu $n_1 = \max\{n_0, k'\} \in \mathbb{N}$, faptul că:

$$\forall\, n \geq n_1 \ : \quad s_n \in S - \Omega(M) \ \text{ şi } \ M(s_n) = M_n(s_n) < k' \ .$$

Prin urmare, luând în particular $n = n_1$ şi notând cu $s_M = s_{n_1}$, avem:

$$\forall\, M \in RS(\gamma_i), \exists\, s_M \in S' : M(s_M) < k' \ . \tag{3.6}$$

Aşadar, din relaţiile (3.5) şi (3.6) pentru cele două cazuri posibile, urmează că am demonstrat următorul fapt:

$$\exists\, k' \geq 0 : \forall\, 0 \leq i \leq n, \forall\, M \in RS(\gamma_i), \exists\, s_M \in S' : M(s_M) < k' \ ,$$

de unde rezultă că:

$$\forall\, 0 \leq i \leq n, \exists\, k_i \stackrel{def}{=} k' \geq 0 : \forall\, M \in RS(\gamma_i), \exists\, s_M \in S' : M(s_M) < k_i \ ,$$

şi prin urmare, pentru orice $0 \leq i \leq n$, S' nu este simultan nemărginită în γ_i, ceea ce este în contradicţie cu ipoteza. Aşadar, presupunerea făcută este falsă, deci S' este simultan nemărginită în γ.

(ii) Această afirmaţie rezultă imediat de la (i), considerând mulţimea de locaţii $S' = \{s\}$, pe baza observaţiei simple că locaţia s este nemărginită în γ' dacă şi numai dacă mulţimea de locaţii $\{s\}$ este simultan nemărginită în γ', valabilă atît pentru reţele P/T (cu marcări iniţiale finite sau infinite), cît şi pentru reţele cu salturi (vezi observaţia 1.1.5 (iii)).

(iii) Această afirmaţie rezultă pe baza afirmaţiei (ii) şi a următoarelor două observaţii:

(*) $RS(\gamma')$ este infinită dacă şi numai dacă γ' este nemărginită, afirmaţie ce este valabilă atît pentru reţele P/T (doar reţele P/T cu marcări iniţiale finite), cît şi pentru reţele cu salturi;

(**) Dacă $\gamma' = (\Sigma', M'_0)$ este o reţea P/T cu o marcare iniţială infinită (i.e. $\Omega(M'_0) \neq \emptyset$), atunci toate locaţiile din mulţimea $\Omega(M'_0)$ sunt nemărginite, şi prin urmare reţeaua γ' este nemărginită. Totuşi, mulţimea $RS(\gamma')$ poate fi finită.

Într-adevăr, folosind observaţiile $(*)$, $(**)$ şi afirmaţia (ii), avem că:

$$\begin{gathered}
RS(\gamma) \text{ este infinită } \Leftrightarrow\ \gamma \text{ este nemărginită } \Leftrightarrow \\
\exists\, s \in S \text{ astfel încât } s \text{ este nemărginită în } \gamma \ \Leftrightarrow \\
\exists\, s \in S, \exists\, 0 \leq i \leq n \text{ astfel încât } s \text{ este nemărginită în } \gamma_i \ \Leftrightarrow \\
\exists\, 0 \leq i \leq n, \exists\, s \in S \text{ astfel încât } s \text{ este nemărginită în } \gamma_i \ \Leftrightarrow \\
\exists\, 0 \leq i \leq n \text{ astfel încât } \gamma_i \text{ este nemărginită } \Leftrightarrow \\
\exists\, 0 \leq i \leq n \text{ astfel încât } \Omega(M''_i) \neq \emptyset \text{ (i.e. marcarea iniţială a lui } \gamma_i \text{ are} \\
\omega\text{-componente) sau } RS(\gamma_i) \text{ este infinită (în cazul cînd } \Omega(M''_i) = \emptyset).
\end{gathered}$$

(iv) $\Rightarrow$ Să demonstrăm întîi implicaţia în sens direct. Fie M o marcare acoperibilă în γ. Deci există o marcare j-accesibilă $M_1 \in RS(\gamma)$ astfel încât $M \leq M_1$. Deosebim două cazuri posibile:

(a) $\exists\, w \in T^*$ astfel încât $M_0\,[w\rangle_\Sigma\, M_1$
(adică marcarea M_1 este accesibilă de la M_0 fără salturi).

În acest caz, rezultă că $M_1 \in RS(\gamma_0)$ şi cum $M \leq M_1$, deducem că M este acoperibilă în γ_0.

(b) $\exists\, w_1, w_2 \in T^*$ şi $r = (M', M'') \in R$ astfel încât

$$M_0\,[w_1\rangle_{\gamma,j}\, M'\, r\, M''\,[w_2\rangle_\Sigma\, M_1$$

(adică M_1 este accesibilă de la M_0 prin salturi, r fiind ultimul salt).

În acest caz, pe baza propoziţiei 3.2.3 (2), deducem că $\exists\, 1 \leq i \leq n$ astfel încât $r \leq r_i$. Prin urmare, $M'' \leq M''_i$ şi $M''_i\,[w_2\rangle_\Sigma\, M_2$, unde

$$M_2 = M''_i + \Delta w_2 = M''_i - M'' + M_1 \geq M_1 \geq M \ \ .$$

Avem deci $M_2 \in RS(\gamma_i)$ şi $M_2 \geq M$, adică M este acoperibilă în γ_i.

(iv) $\Leftarrow$ Să demonstrăm acum implicaţia în sens invers. Presupunem deci că există $0 \leq i \leq n$ astfel încât marcarea M este acoperibilă în γ_i. Deci există o (pseudo-)marcare accesibilă $M_1 \in RS(\gamma_i)$ astfel încât $M \leq M_1$. Deosebim două cazuri posibile:

(a) $r_i \in R_{\omega-max} \cap R$, adică saltul $r_i = (M'_i, M''_i)$ nu conţine ω-componente. Întrucît reţeaua γ este R-redusă, avem că $M''_i \in RS(\gamma)$, şi deoarece $M_1 \in RS(\gamma_i)$, rezultă că $M_1 \in RS(\gamma)$. Prin urmare, rezultă că M este acoperibilă în γ.

(b) $r_i \in R_{\omega-max} \cap R_\omega$, adică saltul $r_i = (M'_i, M''_i)$ conţine ω-componente. Prin urmare, conform definiţiei mulţimii R_ω, avem:

$$\exists\, \{r_n\}_{n\geq 0} \subseteq R \text{ şir strict crescător cu } \lim_{n\to\infty} r_n = r_i \ \ .$$

Fie $r_n = (M'_n, M''_n), \forall\, n \geq 0$, şi cum $M_1 \in RS(\gamma_i)$, avem:

$$\lim_{n\to\infty} M''_n = M''_i \ \text{ şi } \ M''_i\,[w\rangle_\Sigma\, M_1\,, \text{ cu } w \in T^*\,.$$

Pe baza propoziţiei 3.2.4 rezultă că există $n_0 \geq 0$ şi există un şir de marcări $\{M'''_n\}_{n\geq n_0}$ astfel încât

$$M''_n\,[w\rangle_\Sigma\, M'''_n\,, \forall\, n \geq n_0, \ \text{ şi } \ \lim_{n\to\infty} M'''_n = M_1 \ \ .$$

În continuare avem două subcazuri:

b_1) Dacă $\Omega(M_1) = \emptyset$, ceea ce se poate întîmpla dacă şi numai dacă $\Omega(M_i'') = \emptyset$, atunci avem $M_n'' = M_i'', \forall\, n \geq 0$ (i.e. $\{M_n''\}_{n \geq n_0}$ este şirul constant) şi deci $M_n''' = M_1, \forall\, n \geq 0$ (în acest caz, $n_0 = 0$).

Datorită faptului că $\Omega(M_i'') = \emptyset$ şi γ este R-redusă, rezultă că $M_i'' \in RS(\gamma)$ şi, cum $M_i'' [w\rangle_\Sigma M_1$, obţinem că $M_1 \in RS(\gamma)$. Prin urmare, cum $M \leq M_1$, rezultă că M este acoperibilă în γ.

b_2) Altfel, $\Omega(M_1) \neq \emptyset$ (i.e. M_1 conţine ω-componente), ceea ce se poate întîmpla dacă şi numai dacă $\Omega(M_i'') \neq \emptyset$. Deoarece M este o marcare (i.e. M nu conţine ω-componente), rezultă că $M \neq M_1$, prin urmare avem $M < M_1$.

Deoarece $\{r_n\}_{n \geq 0} \subseteq R$ este şir strict crescător şi $\Omega(M_i'') \neq \emptyset$, rezultă că $\{M_n''\}_{n \geq 0}$ este şir strict crescător. Prin urmare, şi $\{M_n'''\}_{n \geq n_0}$ este şir strict crescător (întrucît $M_n''' = M_n'' + \Delta w\,, \forall\, n \geq n_0$). Şi cum $\lim M_n''' = M_1$ şi $M < M_1$, deducem că există $n_1 \geq n_0$ astfel încât $M \leq M_n''', \forall\, n \geq n_1$.

În particular, avem $M \leq M_{n_1}'''$. Reţeaua γ fiind R-redusă, rezultă că $M_{n_1}'' \in RS(\gamma)$, şi cum $M_{n_1}'' [w\rangle_\Sigma M_{n_1}'''$, rezultă $M_{n_1}''' \in RS(\gamma)$.

Prin urmare, marcarea M este acoperibilă în γ.

(v) Această afirmaţie rezultă imediat de la (iv), considerând marcarea $M = t^-$, pe baza observaţiei că t este pseudo-viabilă în γ' dacă şi numai dacă marcarea $M = t^-$ este acoperibilă în γ', valabilă atît pentru reţele P/T (cu marcări iniţiale finite sau infinite), cît şi pentru reţele cu salturi. $\square$

Următorul rezultat stabileşte caracterizări ale proprietăţilor specificate în propoziţia anterioară folosind structurile de acoperire minimale.

Teorema 3.2.6 *Fie γ o mRCJPTN şi $\mathcal{MCG}(\gamma)$ graful ei de acoperire minimal. Au loc afirmaţiile următoare:*

(1) O mulţime de locaţii S' este simultan nemărginită în γ dacă şi numai dacă există cel puţin un nod M într-unul din grafurile din $\mathcal{MCG}(\gamma)$ cu $M(s) = \omega$, pentru orice $s \in S'$;

(2) O locaţie s este nemărginită în γ dacă şi numai dacă există cel puţin un nod M într-unul din grafurile din $\mathcal{MCG}(\gamma)$ cu $M(s) = \omega$;

(3) Mulţimea $RS(\gamma)$ este infinită dacă şi numai dacă există cel puţin un nod într-unul din grafurile din $\mathcal{MCG}(\gamma)$ avînd măcar o ω-componentă;

(4) O marcare M este acoperibilă în γ dacă şi numai dacă există cel puţin un nod M' într-unul din grafurile din $\mathcal{MCG}(\gamma)$ cu $M \leq M'$;

(5) O tranziţie t este pseudo-viabilă în γ dacă şi numai dacă există cel puţin un nod M într-unul din grafurile din $\mathcal{MCG}(\gamma)$ cu $t^- \leq M$, sau echivalent, dacă şi numai dacă există cel puţin un arc etichetat cu t într-unul din grafurile din $\mathcal{MCG}(\gamma)$.

Demonstraţie. Afirmaţiile din teoremă rezultă imediat utilizând definiţia grafului de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$ (definiţia 3.2.10), propoziţia precedentă (propoziţia 3.2.5), şi rezultatul similar de la reţele P/T, cu marcări iniţiale finite ([22], şi teorema 3.1.5) sau infinite (teorema 3.1.7). $\square$

Exemplul 3.2.5 *Pentru reţeaua cu salturi din exemplul 3.2.1 avem că: locaţiile s_1 şi s_2 sunt mărginite, iar locaţia s_3 este nemărginită; mulţimea de j-accesibilitate este infinită; tranziţiile t_1 şi t_2 sunt pseudo-viabile; cu excepţia marcărilor j-accesibile, nu există nici o altă marcare acoperibilă.*

Afirmaţiile din teorema 3.2.6 au loc pentru orice graf de acoperire finit al reţelei γ, nu numai pentru graful de acoperire minimal, şi prin urmare, pentru a decide problemele enumerate mai devreme, este suficient să calculăm (i.e. să construim) un graf de acoperire finit. De exemplu, graful de acoperire Karp–Miller al reţelei γ,

$$\mathcal{KMG}(\gamma) = \langle \mathcal{KMG}(\gamma_0), \mathcal{KMG}(\gamma_1), \ldots, \mathcal{KMG}(\gamma_n) \rangle \ ,$$

(unde $\mathcal{KMG}(\gamma_i)$ este graful de acoperire Karp–Miller al P/T-reţelei γ_i, pentru fiecare $0 \leq i \leq n$), este un graf de acoperire finit şi calculabil. Utilizarea grafului de acoperire minimal pentru rezolvarea acestor probleme de decizie este importantă din punct de vedere computaţional deoarece acesta are, în general, o dimensiune mult mai mică decît graful de acoperire Karp–Miller.

Din teorema precedentă şi teorema 3.2.5, rezultă că avem următoarele probleme decidabile pe baza grafului de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(\gamma)$ pentru reţele cu salturi reduse-calculabile marcate:

Corolarul 3.2.3 *Problemele mărginirii, a nemărginirii simultane, a finititudinii mulţimii de accesibilitate, a acoperirii şi a pseudo-viabilităţii sunt decidabile pentru clasa mRCJPTN.*

În concluzie, problemele (BP), (SUbP), (FRSP), (CP) şi (QLP) sunt toate decidabile, utilizînd graful de acoperire minimal, pentru clasa *reţelelor cu salturi reduse-calculabile*, şi deci, în particular, şi pentru clasa reţelelor cu salturi *finite*, ceea ce are o importanţă practică deosebită, deoarece dimensiunea grafului de acoperire minimal este semnificativ mai mică, în general, decît cea a arborelui de acoperire Karp–Miller.

3.3 Alte aplicaţii ale structurilor de acoperire pentru reţele Petri P/T şi cu salturi

În această secţiune voi prezenta modul de utilizare a structurilor de acoperire ale reţelelor Petri P/T şi cu salturi pentru calculul maximului unei funcţii monotone pe mulţimea de accesibilitate, rezultat pe care l-am aplicat apoi la calculul gradelor de concurenţă a reţelelor Petri, după cum vom vedea în capitolul 5. Prezentarea din această secţiune se bazează pe rezultatele *originale* publicate în articolul [112] (o versiune preliminară a acestuia a fost prezentată la conferinţa ICAM 2, [109]).

3.3.1 Maximul funcţiilor monotone pe mulţimea de accesibilitate a unei reţele Petri

Discuţia din această secţiune va fi valabilă atît pentru reţele P/T, cît şi pentru reţele Petri cu salturi.

Fie γ o reţea marcată (o *mPTN* sau o *mJPTN*), şi $f : \mathbb{N}^S \rightarrow \mathbb{N}$(sau $\mathbb{Z}$) o funcţie arbitrară definită pe mulţimea marcărilor reţelei γ, funcţie ce este monoton crescătoare, i.e.

$$\forall\, M_1, M_2 \in \mathbb{N}^S : M_1 \leq M_2 \;\Rightarrow\; f(M_1) \leq f(M_2)\,.$$

Suntem interesaţi în a calcula maximul (de fapt, supremul) funcţiei f pe mulţimea tuturor marcărilor accesibile ale reţelei γ, i.e.

$$\sup\{\, f(M) \mid M \in RS(\gamma)\,\}\,.$$

Evident, dacă mulţimea de accesibilitate $RS(\gamma)$ este finită, atunci acest suprem este de fapt un maxim şi poate fi calculat în mod direct. Altfel, dacă $RS(\gamma)$ este infinită, nu putem calcula direct acest suprem. Totuşi, voi arăta cum putem folosi orice mulţime de acoperire finită $CS(\gamma)$ a reţelei γ (în particular, mulţimea de acoperire minimală) pentru a calcula acest suprem.

Pentru început, să discutăm despre funcţii monoton crescătoare de forma $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ (with $k \geq 1$) şi proprietăţile lor. Mai întîi, să ne reamintim din capitolul introductiv, subsecţiunea 1.1.3, extensia $\mathbb{N}_\omega = \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ a mulţimii numerelor întregi nenegative, notaţia $\Omega(x) = \{\ i\ |1 \leq i \leq k$ şi $x(i) = \omega\}$ pentru mulţimea ω-componentelor unui element $x \in \mathbb{N}^k_\omega$ (unde $x(i)$ este a i-a componentă a vectorului x), precum şi definiţia limitei în $\mathbb{N}^k_\omega$, şi anume: un şir infinit de vectori $\{x_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^k$ *converge* la vectorul $x \in \mathbb{N}^k_\omega$, abreviat

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ (sau, pe scurt, $\lim x_n = x$), dacă şi numai dacă satisface următoarea condiţie:

$$\forall n \geq 0 : \begin{cases} x_n(i) \geq n & \text{, pentru fiecare } i \in \Omega(x), \\ x_n(i) = x(i) & \text{, pentru fiecare } i \in \{1, \ldots, k\} - \Omega(x). \end{cases}$$

Notaţia 3.3.1 *Fiecărui vector $x \in \mathbb{N}^k_\omega$ îi putem asocia un şir infinit de vectori $\{\overline{x}_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^k$, numit* şirul canonic *asociat lui x, şi definit prin:*

$$\overline{x}_n(i) = \begin{cases} n & \text{, dacă } i \in \Omega(x) \\ x(i) & \text{, altfel} \end{cases} \quad \text{, pentru orice } n \geq 0.$$

Orice funcţie monoton crescătoare $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ poate fi extinsă "*prin continuitate*" la o funcţie $\overline{f} : \mathbb{N}^k_\omega \to \mathbb{N}_\omega$, în felul următor. Să observăm că, pentru fiecare vector $x \in \mathbb{N}^k_\omega - \mathbb{N}^k$, şirul canonic asociat lui x, $\{\overline{x}_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^k$, este un şir infinit strict crescător de vectori şi, prin urmare, $\{f(\overline{x}_n)\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}$ este un şir infinit monoton crescător de numere întregi. Ca urmare, există limita, în $\mathbb{N}_\omega$, a acestui şir (sau, echivalent, există supremul acestui şir), i.e.

$$\exists \lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_n) \;=\; \sup_{n\geq 0} f(\overline{x}_n) \;\in \mathbb{N}_\omega \,.$$

Definiţia 3.3.1 Extensia ("prin continuitate") *a unei funcţii monoton crescătoare $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ este funcţia $\overline{f} : \mathbb{N}^k_\omega \to \mathbb{N}_\omega$, definită prin:*

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_n), & \text{, dacă } x \in \mathbb{N}^k_\omega - \mathbb{N}^k \\ f(x) & \text{, altfel} \end{cases} ,$$

unde $\{\overline{x}_n\}_{n\geq 0}$ este şirul canonic asociat lui x.

Numele funcţiei $\overline{f}$ este justificat de faptul că $\overline{f}$ are următoarele proprietăţi:

Propoziţia 3.3.1 1) *$\overline{f}$ este monoton crescătoare, i.e.*

$$\forall\, x, y \in \mathbb{N}^k_\omega : \; x \leq y \quad \Rightarrow \quad \overline{f}(x) \leq \overline{f}(y)\,;$$

2) *$\overline{f}$ "păstrează limita", i.e.*

$$\forall\, \{x_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^k : \; \exists \lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{N}^k_\omega \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \overline{f}(x)\,.$$

Demonstraţie. 1) Să demonstrăm întâi că $\overline{f}$ este monoton crescătoare.

Fie $x, y \in \mathbb{N}^k_\omega$ doi vectori arbitrari cu $x \leq y$. Rezultă că $\Omega(x) \subseteq \Omega(y)$. Ca urmare, putem deosebi trei cazuri posibile:

(a) $\Omega(x) = \Omega(y) = \emptyset$, i.e. $x, y \in \mathbb{N}^k$. În acest caz avem că $\overline{f}(x) = f(x)$ şi $\overline{f}(y) = f(y)$ (conform definiţiei 3.3.1), şi prin urmare $\overline{f}(x) \leq \overline{f}(y)$, deoarece f este o funcţie monoton crescătoare.

(b) $\Omega(x) = \emptyset$ şi $\Omega(y) \neq \emptyset$, i.e. $x \in \mathbb{N}^k$ şi $y \in \mathbb{N}^k_\omega - \mathbb{N}^k$. În acest caz avem că $\overline{f}(x) = f(x)$ şi $\overline{f}(y) = \lim_{n\to\infty} f(\overline{y}_n)$ (conform definiţiei 3.3.1), unde $\{\overline{y}_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^k$ este şirul canonic asociat lui y.

Fie $n_0 = \max\{x(i) \mid i \in \Omega(y)\} \in \mathbb{N}$ (care este bine-definit deoarece $\Omega(y) \neq \emptyset$ şi $x \in \mathbb{N}^k$). Întrucît $x \leq y$, deducem că $x \leq \overline{y}_{n_0}$, şi, prin urmare, avem că $x \leq \overline{y}_n$, pentru orice $n \geq n_0$ (deoarece şirul canonic asociat lui y este strict crescător). Cum funcţia f este monoton crescătoare, rezultă că $f(x) \leq f(\overline{y}_n)$, pentru orice $n \geq n_0$, şi prin urmare $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} f(\overline{y}_n)$. Aşadar, $\overline{f}(x) \leq \overline{f}(y)$.

(c) $\Omega(x) \neq \emptyset$ şi $\Omega(y) \neq \emptyset$, i.e. $x, y \in \mathbb{N}^k_\omega - \mathbb{N}^k$. În acest caz avem că $\overline{f}(x) = \lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_n)$ şi $\overline{f}(y) = \lim_{n\to\infty} f(\overline{y}_n)$, unde $\{\overline{x}_n\}_{n\geq 0}, \{\overline{y}_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^k$ sunt şirurile canonice asociate lui x, y respectiv.

Cum $\Omega(x) \subseteq \Omega(y)$, considerăm $n_0 = \max\{x(i) \mid i \in \Omega(y) - \Omega(x)\}$, dacă $\Omega(x) \neq \Omega(y)$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ deoarece $x(i) \in \mathbb{N}, \forall\, i \in \Omega(y) - \Omega(x)$), respectiv luăm $n_0 = 0$, în caz contrar. Deoarece $x \leq y$ şi $\Omega(x) \subseteq \Omega(y)$, este uşor de observat că $\overline{x}_n \leq \overline{y}_n$, pentru orice $n \geq n_0$. Cum funcţia f este monoton crescătoare, rezultă că $f(\overline{x}_n) \leq f(\overline{y}_n)$, pentru orice $n \geq n_0$, şi prin urmare $\lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_n) \leq \lim_{n\to\infty} f(\overline{y}_n)$. Aşadar, $\overline{f}(x) \leq \overline{f}(y)$.

2) Să demonstrăm acum că $\overline{f}$ păstrează limita (i.e. este "continuă").

Deoarece din lema lui Dickson ([18], şi lema 3.2.1) urmează că fiecare şir infinit de elemente din $\mathbb{N}^k$ conţine un subşir infinit monoton crescător, este suficient de demonstrat următorul fapt:

$$\forall\ \{x_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^k \text{ crescător cu } \lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{N}^k_\omega \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \overline{f}(x)$$

Aşadar, fie $\{x_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^k$ un şir infinit crescător arbitrar; prin urmare, există $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{N}^k_\omega$.

Dacă $\Omega(x) = \emptyset$, atunci avem că $x_n = x, \forall\, n \geq 0$, i.e. $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este un şir constant, deci avem în mod evident că $\exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \overline{f}(x)$.

Acum, să presupunem că $\Omega(x) \neq \emptyset$. Deoarece şirul $\{x_n\}_{n\geq 0}$ este crescător rezultă că $\{f(x_n)\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}$ este un şir infinit crescător. Prin urmare, există $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \in \mathbb{N}_\omega$.

Cum $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, de la definiţia limitei în $\mathbb{N}^k_\omega$ avem că $x_n \geq \overline{x}_n$, pentru orice $n \geq 0$, unde $\{\overline{x}_n\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}^k$ este şirul canonic asociat lui x. Funcţia f fiind monoton crescătoare, rezultă că $f(x_n) \geq f(\overline{x}_n)$, pentru orice $n \geq 0$, şi, ca urmare, prin trecere la limită obţinem că $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq \lim_{n\to\infty} f(\overline{x}_n)$, i.e. $l \geq \overline{f}(x)$.

Aşadar, pentru a termina demonstraţia afirmaţiei 2), este suficient de demonstrat că $l \leq \overline{f}(x)$. Într-adevăr, fie $n \geq 0$ un întreg arbitrar, şi fie $m_n = \max\{x_n(i) \mid i \in \Omega(x)\}$, care este bine-definit, i.e. $m_n \in \mathbb{N}$, deoarece $\Omega(x) \neq \emptyset$ şi $x_n \in \mathbb{N}^k$, $\forall n \geq 0$. Datorită modului de alegere a lui m_n, rezultă că $x_n \leq \overline{x}_{m_n}$, şi, deoarece şirul canonic asociat lui x este strict crescător, avem că $x_n \leq \overline{x}_k$, pentru orice $k \geq m_n$. Funcţia f fiind monoton crescătoare, rezultă că $f(x_n) \leq f(\overline{x}_k)$, pentru orice $k \geq m_n$, şi, ca urmare, prin trecere la limită obţinem că $f(x_n) \leq \lim_{k\to\infty} f(\overline{x}_k) = \overline{f}(x)$.

Aşadar, avem $f(x_n) \leq \overline{f}(x)$, pentru orice $n \geq 0$, şi, ca urmare, concluzionăm că $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \overline{f}(x)$, i.e. $l \leq \overline{f}(x)$. □

În continuare voi arăta cum putem folosi orice mulţime de acoperire finită a unei reţele marcate (în particular, mulţimea de acoperire minimală) pentru a calcula supremul funcţiei f pe mulţimea de accesibilitate a acelei reţele.

Fie γ o reţea marcată (o *mPTN* sau o *mJPTN*), şi $f : \mathbb{N}^S \to \mathbb{N}$ o funcţie arbitrară care este monoton crescătoare. Prin urmare, conform propoziţiei 3.3.1, extensia ei ("prin continuitate") la mulţimea pseudo-marcărilor reţelei γ, $\overline{f} : \mathbb{N}^S_\omega \to \mathbb{N}_\omega$, este de asemenea o funcţie monoton crescătoare.

Teorema 3.3.1 *Considerăm reţeaua γ şi funcţia f ca mai sus. Fie $CS(\gamma)$ o mulţime oarecare de acoperire pentru γ. Are loc următoarea proprietate:*

$$\sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\} \;=\; \sup\{\overline{f}(M) \mid M \in CS(\gamma)\}\,. \tag{3.7}$$

Demonstraţie. Mai întîi, să demonstrăm inegalitatea:

$$\sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\} \;\leq\; \sup\{\overline{f}(M) \mid m \in CS(\gamma)\} \tag{3.8}$$

Deosebim două cazuri posibile:

(a) există un punct de maxim (în membrul stîng), i.e. $\exists\, M' \in RS(\gamma)$ astfel încât $f(M') = \sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\}$.

Conform primei condiţii din definiţia unei mulţimi de acoperire, pentru această marcare M' există o pseudo-marcare $M'' \in CS(\gamma)$ astfel încât $M' \leq M''$. Cum funcţia $\overline{f}$ este monoton crescătoare, rezultă că $f(M') \leq \overline{f}(M'')$ şi deci, deoarece $\overline{f}(M'') \leq \sup\{\overline{f}(M) \mid M \in CS(\gamma)\}$, obţinem inegalitatea (3.8).

(b) nu există un punct de maxim (în membrul stîng), i.e. ω ("$+\infty$") este supremul pentru acea mulţime. (*Observaţie*: acest caz este posibil numai cînd mulţimea $RS(\gamma)$ este infinită.)

Aceasta înseamnă că: $\sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\} = \omega$, şi există un şir infinit de marcări $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} f(M_n) = \omega$.

Conform primei condiţii din definiţia unei mulţimi de acoperire, pentru fiecare marcare M_n există o pseudo-marcare $M'_n \in CS(\gamma)$ astfel încât $M_n \leq M'_n$. Ca atare, avem că $f(M_n) \leq \overline{f}(M'_n)$, pentru orice $n \geq 0$, deoarece funcţia $\overline{f}$ este monoton crescătoare.

Şi cum $\lim_{n\to\infty} f(m_n) = \omega$, rezultă că $\exists \lim_{n\to\infty} \overline{f}(M'_n) = \omega$. Deci, întrucît $\{M'_n\}_{n\geq 0} \subseteq CS(\gamma)$, rezultă că $\sup\{\overline{f}(M) \mid M \in CS(\gamma)\} = \omega$. Prin urmare, inegalitatea (3.8) este îndeplinită cu egalitate în acest caz.

Acum să demonstrăm inegalitatea inversă:

$$\sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\} \;\geq\; \sup\{\overline{f}(M) \mid M \in CS(\gamma)\} \tag{3.9}$$

Deosebim două cazuri posibile:

(a) există un punct de maxim (în membrul drept), i.e. $\exists\, M' \in CS(\gamma)$ astfel încât $\overline{f}(M') = \sup\{\overline{f}(M) \mid M \in CS(\gamma)\}$.

Dacă $M' \in RS(\gamma)$, atunci $\overline{f}(M') = f(M') \leq \sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\}$ şi prin urmare inegalitatea (3.9) este îndeplinită în această situaţie.

Acum să presupunem că $M' \notin RS(\gamma)$, deci $M' \in CS(\gamma) - RS(\gamma)$.

Conform celei de a doua condiţii din definiţia unei mulţimi de acoperire, pentru această pseudo-marcare M' există un şir infinit strict crescător de marcări accesibile $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ convergent la M', i.e. $\lim_{n\to\infty} M_n = M'$.

Din propoziţia 3.3.1 deducem că şirul valorilor $\{f(M_n)\}_{n\geq 0} \subseteq \mathbb{N}$ este un şir infinit crescător convergent la valoarea $\overline{f}(M')$, i.e.

$$\overline{f}(M') = \lim_{n\to\infty} f(M_n) = \sup_{n\geq 0} f(M_n)\,.$$

Dar, deoarece $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$, avem că

$$\sup_{n\geq 0} f(M_n) \leq \sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\}\,.$$

Prin urmare $\overline{f}(M') \leq \sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\}$, şi deci inegalitatea (3.9) este îndeplinită.

(b) nu există un punct de maxim (în membrul drept), i.e. ω ("$+\infty$") este supremul pentru acea mulţime. (*Observaţie*: acest caz este posibil numai cînd mulţimea $CS(\gamma)$ este infinită.)

Aceasta înseamnă că: $\sup\{\overline{f}(M) \mid M \in CS(\gamma)\} = \omega$, şi există un şir de pseudo-marcări $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq CS(\gamma)$ astfel încât $\lim_{n\to\infty} \overline{f}(M_n) = \omega$.

Pentru fiecare $n \geq 0$, dacă $M_n \in CS(\gamma) - RS(\gamma)$, atunci conform condiţiei a doua din definiţia unei mulţimi de acoperire, pentru pseudo-marcarea M_n există un şir infinit strict crescător de marcări accesibile $\{M_{n,k}\}_{k\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ convergent la M_n, i.e. $\lim_{k\to\infty} M_{n,k} = M_n$.

Altfel, dacă $M_n \in RS(\gamma)$, putem lua şirul constant $\{M_{n,k}\}_{k\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$ dat de $M_{n,k} = M_n, \forall\, k \geq 0$.

În ambele situaţii, din propoziţia 3.3.1 deducem că şirul valorilor $\{f(M_{n,k})\}_{k\geq 0} \subseteq \mathbb{N}$ este un şir infinit monoton crescător convergent la $\overline{f}(M_n)$, i.e. $\lim_{k\to\infty} f(M_{n,k}) = \overline{f}(M_n)$, pentru orice $n \geq 0$.

Prin considerarea şirului "diagonal" $\{M'_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$, definit prin $M'_n = M_{n,n}, \forall\, n \geq 0$, este uşor de demonstrat faptul că:

$$\lim_{n\to\infty} f(M'_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{f}(M_n) \ .$$

Deci avem $\lim_{n\to\infty} f(M'_n) = \omega$, şi, deoarece $\{M'_n\}_{n\geq 0} \subseteq RS(\gamma)$, rezultă că $\sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\} = \omega$. Prin urmare, inegalitatea (3.9) este îndeplinită cu egalitate în acest caz.

Din inegalităţile (3.8) şi (3.9) obţinem egalitatea (3.7) specificată în enunţul acestei teoreme. □

Corolarul 3.3.1 *Fie reţeaua γ şi funcţia f ca în enunţul teoremei 3.3.1. Dacă extensia sa $\overline{f}$ este calculabilă, atunci supremul funcţiei f pe mulţimea de accesibilitate a reţelei γ este de asemenea calculabilă, prin folosirea în relaţia (3.7) a oricărei mulţimi de acoperire finite pentru γ (în particular, a mulţimii de acoperire minimale, $MCS(\gamma)$):*

$$\sup\{f(M) \mid M \in RS(\gamma)\} \ = \ \max\{\overline{f}(M) \mid M \in MCS(\gamma)\} \,. \tag{3.10}$$

Demonstraţie. Această afirmaţie rezultă cu uşurinţă de la teorema 3.3.1, datorită faptului că supremul din membrul drept al relaţiei (3.7) devine în acest caz un maxim (în $\mathbb{N}_\omega$) pe o mulţime finită, şi deci poate fi calculat. □

După cum vom vedea în capitolul 5, acest rezultat poate fi aplicat la calculul gradelor de concurenţă a reţelelor Petri.

3.4 Structuri de acoperire pentru reţele Petri de nivel înalt

După cum am amintit în secţiunea 2.1 din capitolul 2, ideea de bază a *grafurilor de apariţie* este de a construi un graf ce conţine cîte un nod pentru fiecare marcare accesibilă şi cîte un arc pentru fiecare apariţie a unei tranziţii interpretate.

Un asemenea graf mai este întîlnit în literatura de specialitate despre reţele Petri şi sub denumirea de *graf de accesibilitate*, fiind definit pentru prima dată pentru reţele P/T de către Karp & Miller în lucrarea [51]. În [42] şi [43], K. Jensen a preferat denumirea de *graf de apariţie* deoarece această denumire surprinde faptul că acest graf conţine informaţii nu doar despre marcările accesibile, ci şi despre apariţiile tranziţiilor interpretate.

Ca şi la celelalte clase de reţele, în grafurile de apariţie pentru reţele colorate se omit arcurile corespunzătoare paşilor formaţi din mai mult de o tranziţie interpretată, fără ca prin aceasta să se piardă prea multe informaţii.

Cu toate acestea, grafurile de apariţie pot deveni foate mari, chiar şi pentru CP-reţele mici, ceea ce face ca procesul de construcţie şi investigaţie a acestora să fie dificil şi posibil supus erorilor.

Din acest motiv, este clar că sunt necesare tehnici prin care să putem construi grafuri de apariţie *reduse*, fără a pierde prea multă informaţie.

Voi prezenta în această secţiune definiţia formală a *grafurilor de apariţie complete* şi a celor *de acoperire*. Mai precis, în prima subsecţiune voi face o trecere în revistă a structurilor de accesibilitate (i.e., arbore şi graf de apariţie) pentru reţele colorate.

Apoi, în subsecţiunile următoare, voi prezenta structurile de acoperire pentru aceste reţele, cele de tip Karp–Miller şi cele minimale, precum şi proprietăţile decidabile pe baza acestora. Această parte *originală* a lucrării de faţă se bazează pe rezultatele publicate în raportul tehnic (Vidraşcu [119]). (*Observaţie*: în monografiile sale [42, 43], K. Jensen a spus că se poate aplica ideea marcărilor de acoperire de la reţele clasice P/T şi în cazul reţelelor colorate, dar fără să dezvolte această idee, i.e. fără a da definiţia formală a structurilor de acoperire pentru reţelele colorate şi rezultatele conexe acestora.)

Pentru celelalte tehnici ce au fost dezvoltate pentru a obţine *grafuri de apariţie reduse*, şi anume grafuri de apariţie *cu clase de echivalenţă* şi grafuri de apariţie *cu simetrii*, precum şi a proprietăţilor decidabile pe baza acestora, recomandăm consultarea monografiei [43] (se mai poate consulta şi sinteza pe care am realizat-o în raportul tehnic [119]).

3.4.1 Structuri de accesibilitate

Ca şi în cazul reţelelor P/T, modelarea sistemelor concurente prin intermediul reţelelor colorate a condus la necesitatea investigării mulţimii tuturor marcărilor accesibile ale unei reţele colorate, numită *mulţimea de accesibilitate* a reţelei şi notată, după cum am văzut în subsecţiunea 1.3.1, cu $[M_0\rangle_{CPN}$, sau cu $RS(CPN)$. De la definiţia acestei mulţimi urmează că putem construi, în mod natural, un arbore ale cărui noduri sunt etichetate cu marcări, ale cărui arce sunt etichetate cu tranziţii interpretate şi astfel încât:

(1) rădăcina v_0 a arborelui să fie etichetată cu marcarea iniţială a reţelei;

(2) dacă v este un nod al arborelui, etichetat cu o marcare M, atunci pentru orice tranziţie interpretată $Y \in BE$ astfel încât $M[Y\rangle$, există un nod distinct v' etichetat cu $M' = M + \Delta Y$; arcul (v, v') este etichetat cu Y.

Acest arbore este numit, în mod curent, *arborele de accesibilitate* al reţelei.

Definiţia 3.4.1 *Fie CPN o CP-reţea. Se numeşte* arbore de accesibilitate *al reţelei CPN, orice arbore $(\mathbb{M}, BE)$-etichetat $\mathcal{RT} = (V, E, l_V, l_E)$ cu următoarele proprietăţi:*

(i) rădăcina lui, notată v_0, este etichetată cu M_0, adică $l_V(v_0) = M_0$;

(ii) pentru orice nod $v \in V$, $|v^+| = |BE(l_V(v))|$;

(iii) pentru orice nod $v \in V$ cu $|v^+| > 0$ şi orice tranziţie interpretată $Y \in BE(l_V(v))$ există un nod $v' \in V$ astfel încât :

1) $(v, v') \in E$;

2) $l_V(v') = l_V(v) + \Delta Y$;

3) $l_E(v, v') = Y$.

Este uşor de văzut că dacă $\mathcal{RT}$ şi $\mathcal{RT}'$ sunt doi arbori de accesibilitate ai unei CP-reţele CPN, atunci ei sunt izomorfi. Din acest motiv putem vorbi de arborele de accesibilitate al unei CP-reţele CPN, arbore ce va fi notat prin $\mathcal{RT}(CPN)$. Uneori vom mai folosi pentru el şi denumirea de *arbore de apariţie*, datorită motivului menţionat la începutul acestei secţiuni.

Proprietăţile de bază ale arborelui de accesibilitate sunt date de următoarea propoziţie a cărei demonstraţie este imediată de la definiţii.

Propoziţia 3.4.1 *Fie CPN o CP-reţea şi $\mathcal{RT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de accesibilitate. Atunci, au loc următoarele proprietăţi:*

(1) un nod $v \in V$ este nod frunză dacă şi numai dacă nu există nici o tranziţie interpretată $Y \in BE$ astfel încât $l_V(v)[Y\rangle_{CPN}$;

(2) $RS(CPN) = \{l_V(v) \mid v \in V\}$;

(3) Dacă, în plus, CP-reţeaua CPN este cu mulţimi de culori finite, atunci arborele $\mathcal{RT}(CPN)$ este finit ramificat.

Graful de accesibilitate $\mathcal{RG}(CPN)$ al unei CP-reţele CPN se defineşte ca fiind graful orientat etichetat (pe arce) obţinut din arborele de accesibilitate $\mathcal{RT}(CPN)$ prin "identificarea" nodurilor avînd aceeaşi etichetă.

Definiţia 3.4.2 *Fie CPN o CP-reţea. Se numeşte* graful de accesibilitate *al reţelei CPN, graful orientat etichetat $\mathcal{RG}(CPN) = ([M_0\rangle_{CPN}, BE, E')$, mulţimea E' a arcelor etichetate fiind definită astfel:*

$$\forall M_1, M_2 \in [M_0\rangle_{CPN}, \forall\, Y \in BE : \quad (M_1, Y, M_2) \in E' \;\Leftrightarrow\; M_1[Y\rangle_{CPN} M_2.$$

Datorită motivului menţionat la începutul acestei secţiuni, uneori vom mai folosi pentru el şi denumirea de *graful de apariţie* al reţelei CPN, şi notaţia $\mathcal{OG}(CPN)$.

Proprietăţile de bază ale grafului de accesibilitate sunt date de o propoziţie analoagă propoziţiei 3.4.1, şi a cărei demonstraţie este imediată de la definiţii.

Propoziţia 3.4.2 *Fie CPN o CP-reţea şi $\mathcal{RG}(CPN)$ graful ei de accesibilitate. Atunci, au loc următoarele proprietăţi:*

(1) un nod M al grafului $\mathcal{RG}(CPN)$ este nod frunză dacă şi numai dacă nu există nici o tranziţie interpretată $Y \in BE$ astfel încât $M[Y\rangle_{CPN}$;

(2) mulţimea nodurilor grafului de accesibilitate este chiar mulţimea de accesibilitate a reţelei CPN;

(3) Dacă, în plus, CP-reţeaua CPN este cu mulţimi de culori finite, atunci graful $\mathcal{RG}(CPN)$ este finit ramificat.

O altă proprietate a grafului de accesibilitate pentru CP-reţele CPN cu mulţimi de culori finite este dată de următoarea propoziţie a cărei demonstraţie decurge imediat de la definiţii.

Propoziţia 3.4.3 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite. Atunci, graful ei de accesibilitate $\mathcal{RG}(CPN)$ este finit dacă şi numai dacă toate locaţiile reţelei CPN sunt mărginite.*

În continuare voi prezenta un algoritm abstract (preluat din [43]) ce construieşte graful de accesibilitate al unei CP-reţele. Variabila *unprocessednodes* este o mulţime de noduri, ce conţine acele noduri pentru care nu am construit încă succesorii. Procedura $create\_node(M, RG)$ creează un nou nod M al grafului RG, în caz că nodul M nu exista deja. Procedura $create\_arc(M_1, M_2, Y, RG)$ creează un nou arc (M_1, Y, M_2) al grafului RG, în caz că acest arc nu exista deja.

Propoziţia 3.4.4 *Fie CPN o CP-reţea. Algoritmul următor construieşte graful ei de accesibilitate $\mathcal{RG}(CPN)$. Algoritmul se opreşte dacă şi numai dacă graful de accesibilitate este finit. Altfel, algoritmul îşi continuă execuţia la infinit, producînd un subgraf din ce în ce mai mare al grafului de accesibilitate.*

<u>procedure</u> *occurence_graph* (CPN: CP-reţea; var RG: graf);
{* rezultatul va fi returnat în RG *}
<u>var</u> unprocessednodes: mulţime de noduri;
    M_1,M_2: marcări; Y: tranziţie interpretată;
<u>begin</u>
  unprocessednodes := $\{create\_node(M_0, RG)\}$;
  <u>while</u> unprocessednodes $\neq \emptyset$ <u>do</u>
    selectează o marcare $M_1 \in$ unprocessednodes;
    <u>for</u> orice tranziţie interpretată $Y \in BE$ astfel încât $M_1[Y\rangle_{CPN} M_2$ <u>do</u>
      $create\_node(M_2, RG)$;
      $create\_arc(M_1, Y, M_2, RG)$;
      unprocessednodes := unprocessednodes+$\{M_2\}$;
    <u>endfor</u>;
    unprocessednodes := unprocessednodes$-\{M_1\}$;
  <u>endwhile</u>;
<u>end</u>.

Pe baza grafului de accesibilitate sunt decidabile o serie de proprietăţi pentru CP-reţelele ce au graful de accesibilitate finit, precum ar fi: proprietăţi de accesibilitate, proprietăţi de mărginire, proprietăţi de revenire, proprietăţi de viabilitate, şi proprietăţi de echitate. În legătură cu regulile de demonstraţie utilizate pentru aceste proprietăţi ale reţelelor colorate, recomandăm consultarea lucrării [43] (se mai poate consulta şi sinteza pe care am realizat-o în raportul tehnic [119]).

În cele ce urmează voi prezenta definiţia formală a *grafurilor de acoperire*. Mai precis, în următoarea subsecţiune voi face o trecere în revistă a a structurilor de acoperire de tip Karp-Miller pentru reţele colorate, iar în a treia subsecţiune voi prezenta structurile de acoperire minimale pentru reţele colorate. Apoi, în ultima subsecţiune, voi prezenta proprietăţile care sunt decidabile atît pe baza structurilor de acoperire Karp-Miller, cît şi pe baza structurilor de acoperire minimale.

Mai întîi însă, să remarcăm că, pentru CP-reţele cu mulţimi de culori finite, i.e. cu domenii finite ale tipurilor, se poate demonstra cu uşurinţă că grafurile de acoperire obţinute sunt întotdeauna finite. Într-adevăr, are loc:

Observaţia 3.4.1 *Fie $CPN = (S, T, A, N, \Sigma, C, G, E, I)$ o reţea colorată neierarhică avînd mulţimile de culori finite (i.e., domeniile tipurilor sunt finite), şi fie $PTN_{CPN} = (S', T', F', W', M'_0)$, reţeaua P/T echivalentă cu ea (vezi definiţia 1.3.9). Deoarece mulţimile de culori ale CP-reţelei CPN sunt finite, mulţimea de locaţii, $S' = TE$, şi cea de tranziţii, $T' = BE$, sunt finite, deci echivalenta PTN_{CPN} este o reţea P/T finită.*

Dar ştim că reţeaua CPN are exact aceleaşi mulţime de marcări, marcare iniţială, mulţime de paşi şi secvenţe de apariţie ca şi P/T echivalenta sa, PTN_{CPN}, cele două reţele fiind echivalente comportamental (conform teoremei 1.3.1).

Prin urmare, putem extinde într-o manieră directă toate structurile de acoperire (i.e. mulţime de acoperire, arbore şi graf de acoperire Karp-Miller sau minimal) cunoscute de la reţele P/T (finite) la CP-reţele, definind pur şi simplu aceste structuri pentru reţeaua CPN ca fiind structurile corespunzătoare ale echivalentei sale, PTN_{CPN}, care este o reţea P/T finită.

Şi ca atare, toate rezultatele cunoscute despre structurile de acoperire pentru reţele P/T se vor transfera la structurile de acoperire pentru reţele colorate: structurile de acoperire pentru CP-reţele cu mulţimi de culori finite, sunt finite şi permit rezolvarea aceloraşi probleme de decizie ca şi cele de la reţele P/T.

3.4.2 Structuri de acoperire Karp–Miller

La fel ca la reţele P/T, arborele de accesibilitate al unei CP-reţele poate fi infinit chiar dacă mulţimea de accesibilitate este finită. Ca urmare a acestui aspect, un studiu al mulţimii de accesibilitate prin intermediul arborelui de accesibilitate este dificil de realizat. Putem însă obţine de la arborele de accesibilitate un arbore finit fără a pierde "prea multe" informaţii despre marcările accesibile ale reţelei. Ideea este de a "trunchia" ramurile "structurate regulat" şi de a indica respectiva regularitate în eticheta frunzelor. $M(s)(c) = \omega$ ne spune că numărul de puncte colorate cu culoarea c, din locaţia s, poate creşte nemărginit în cadrul ramurii înlocuite.

Definiţia 3.4.3 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite. Se numeşte* arbore de acoperire Karp–Miller *al reţelei CPN orice arbore $(\mathbb{M}_\omega, BE)$-etichetat,*

$$\mathcal{T} = (V, E, l_V, l_E),$$

ce satisface următoarele proprietăţi:

(i) rădăcina lui, notată v_0, este etichetată cu M_0, adică $l_V(v_0) = M_0$;

(ii) pentru orice nod $v \in V$ are loc:

$$|v^+| = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } \exists\ v' \in d_{\mathcal{T}}(v_0, v) - \{v\} \text{ cu } l_V(v) = l_V(v') \\ |BE(l_V(v))| & \text{, altfel} \end{cases}$$

(iii) pentru orice nod $v \in V$ cu $|v^+| > 0$ şi orice tranziţie interpretată $Y = (t, b) \in BE(l_V(v))$ există un nod $v' \in V$ astfel încât :

1) $(v, v') \in E$;

2) pentru orice $s \in S$ şi $c \in C(s)$ are loc:

$$l_V(v')(s)(c) = \begin{cases} \omega, & \text{dacă } \exists\ v'' \in d_{\mathcal{T}}(v_0, v) \text{ astfel încât} \\ & \quad l_V(v'') \leq l_V(v) + \Delta Y \text{ şi} \\ & \quad l_V(v'')(s)(c) < (l_V(v) + \Delta Y)(s)(c)\ ; \\ & \\ (l_V(v) + \Delta Y)(s)(c), & \text{altfel.} \end{cases}$$

3) $l_E(v, v') = Y$.

Este uşor de văzut că orice doi arbori de acoperire ai unei CP-reţele sunt izomorfi. Putem vorbi atunci de arborele de acoperire Karp–Miller al unei CP-reţele CPN; el va fi notat prin $\mathcal{KMT}(CPN)$.

În continuare voi prezenta o serie de notaţii şi principalele rezultate despre structurile de acoperire Karp–Miller pentru CP-reţele cu mulţimi de culori finite, a căror demonstraţie rezultă imediat din observaţia 3.4.1 şi rezultatele similare de la reţele P/T.

Notaţia 3.4.1 *După cum observăm, etichetele nodurilor arborelui de acoperire sunt funcţii de la TE la $\mathbb{N}_\omega$. Finititudinea reţelei ne permite să identificăm aceste funcţii cu vectori $|TE|$-dimensionali peste $\mathbb{N}_\omega$. Dacă M este un astfel de vector, atunci componentele ce conţin ω vor mai fi numite şi ω-*componente*; mulţimea tuturor acestor ω-componente va fi notată prin $\Omega(M)$. Adică,*

$$\Omega(M) = \{(s, c) \in TE \mid M(s, c) = \omega\}.$$

Propoziţia ce urmează prezintă câteva proprietăţi de bază ale arborelui de acoperire Karp–Miller.

Propoziţia 3.4.5 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite, şi fie $\mathcal{KMT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)$ arborele ei de acoperire (cu rădăcina v_0). Atunci, au loc următoarele proprietăţi:*

(1) $\mathcal{KMT}(CPN)$ este finit ramificat;

(2) un nod v al arborelui $\mathcal{KMT}(CPN)$ este nod frunză dacă şi numai dacă ori $BE(l_V(v)) = \emptyset$, ori există $v' \in d_{\mathcal{KMT}(CPN)}(v_0, v)$ astfel încât $v \neq v'$ şi $l_V(v) = l_V(v')$;

(3) fie $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}$ noduri distincte două câte două şi astfel încât

$$v_{i_j} \in d_{\mathcal{KMT}(CPN)}(v_0, v_{i_{j+1}}),$$

pentru orice $0 \leq j \leq m-1$.

(3.1) Dacă $l_V(v_{i_0}) = l_V(v_{i_1}) = \cdots = l_V(v_{i_m})$, atunci $m \leq 1$;

(3.2) Dacă $l_V(v_{i_0}) < l_V(v_{i_1}) < \cdots < l_V(v_{i_m})$, atunci $m \leq |TE|$;

(4) $\mathcal{KMT}(CPN)$ este finit.

Corolarul 3.4.1 *Pentru orice CP-reţea CPN cu mulţimi de culori finite, arborele ei de acoperire $\mathcal{KMT}(CPN)$ poate fi efectiv construit.*

Notaţia 3.4.2 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite, şi arborele ei de acoperire $\mathcal{KMT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)$. Dacă $(v_1, v_2) \in E$, $l_V(v_1) = M_1$, $l_V(v_2) = M_2$ şi $l_E(v_1, v_2) = Y$, atunci vom nota $(v_1, M_1) \xrightarrow{Y} (v_2, M_2)$. De fapt, am definit o relaţie de calcul în arborele $\mathcal{KMT}(CPN)$. În manieră naturală extindem relaţia $\xrightarrow{Y}$ la $\xrightarrow{w}$, unde $w \in \mathbb{Y}^*$ (atunci când este posibil).*

Propoziţia 3.4.6 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite, şi arborele ei de acoperire $\mathcal{KMT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)$. Dacă $v_1, v_2 \in V$, $w \in \mathbb{Y}^*$ şi $(v_1, l_V(v_1)) \xrightarrow{w} (v_2, l_V(v_2))$, atunci $l_V(v_2)(s, c) = (l_V(v_1) + \Delta w)(s, c)$, pentru orice $(s, c) \in TE - \Omega(l_V(v_2))$.*

Următoarea teoremă reprezintă rezultatul fundamental ce stabileşte legătura dintre mulţimea tuturor marcărilor accesibile într-o CP-reţea şi mulţimea etichetelor nodurilor arborelui ei de acoperire.

Teorema 3.4.1 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite, avînd arborele de acoperire $\mathcal{KMT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)$, şi fie $M \in \mathbb{M}$ o marcare. Atunci, are loc:*

$$(\exists M' \in [M_0\rangle_{CPN} : \ M \leq M') \quad \Leftrightarrow \quad (\exists v \in V : \ M \leq l_V(v))\,.$$

Corolarul 3.4.2 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite, avînd arborele de acoperire $\mathcal{KMT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)$, şi fie $Y = (t, b) \in BE$ un pas individual. Atunci, are loc:*

$$(\exists M \in [M_0\rangle_{CPN} : \ M[Y\rangle_{CPN}) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists (v, v') \in E : \ l_E(v, v') = Y)\,.$$

Notaţia 3.4.3 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite, avînd arborele de acoperire $\mathcal{KMT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)$. Notăm prin $LAB(CPN)$ mulţimea tuturor etichetelor nodurilor arborelui $\mathcal{KMT}(CPN)$, adică*

$$LAB(CPN) = \{l_V(v) \mid v \in V\}\,.$$

În continuare vom menţiona încă o proprietate a arborelui de acoperire.

Propoziţia 3.4.7 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) $LAB(CPN) \subseteq \mathbb{M}$*;*

(2) $[M_0\rangle_{CPN} = LAB(CPN)$*;*

(3) $[M_0\rangle_{CPN}$ *este finită.*

Închei această subsecţiune prin a defini noţiunea de graf de acoperire.

Analog manierei prin care arborelui de accesibilitate $\mathcal{RT}(CPN)$ al unei CP-reţele CPN i-am asociat graful de accesibilitate $\mathcal{RG}(CPN)$, şi arborelui de acoperire Karp–Miller $\mathcal{KMT}(CPN)$ îi putem asocia graful de acoperire Karp–Miller $\mathcal{KMG}(CPN)$, definit ca fiind graful orientat etichetat (pe arce) obţinut din arborele de acoperire $\mathcal{KMT}(CPN)$ prin "identificarea" nodurilor avînd aceeaşi etichetă.

Definiţia 3.4.4 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite, avînd arborele de acoperire $\mathcal{KMT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)$. Se numeşte* graful de acoperire Karp–Miller *al reţelei CPN, graful orientat etichetat*

$$\mathcal{KMG}(CPN) = (LAB(CPN), BE, E'),$$

mulţimea E' a arcelor etichetate ale grafului fiind definită astfel:

$$(M_1, Y, M_2) \in E' \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ v_1, v_2 \in V:\ (v_1, M_1) \xrightarrow{Y} (v_2, M_2)\,,$$

pentru orice $M_1, M_2 \in LAB(CPN)$, şi orice $Y \in BE$,
$\xrightarrow{Y}$ fiind relaţia de calcul din arborele de acoperire (notaţia 3.4.2).

Propoziţia 3.4.8 *Pentru orice CP-reţea CPN cu mulţimi de culori finite, graful ei de acoperire $\mathcal{KMG}(CPN)$ poate fi efectiv construit.*

3.4.3 Structuri de acoperire minimale

După cum am mai spus, clasa de algoritmi bazaţi pe grafuri de acoperire Karp–Miller, are dezavantajul că dimensiunea grafului este deseori în practică prea mare pentru a putea calcula în timp şi spaţiu rezonabil acel graf. Din acest motiv, eforturile unora dintre cercetători s-au orientat spre reducerea timpului şi spaţiului necesar pentru construirea unor grafuri de acoperire reduse. Astfel, pentru reţele P/T, Alain Finkel a obţinut rezultate semnificative în acest sens în lucrarea [22].

În cele ce urmează voi extinde rezultatele sale la clasa reţelelor colorate cu mulţimi de culori finite, pe baza observaţiei 3.4.1. Reamintesc faptul că demonstraţiile acestor rezultate pentru CP-reţele cu mulţimi de culori finite, rezultă imediat din observaţia 3.4.1 şi rezultatele similare de la reţele P/T.

Noţiunea de mulţime de acoperire introdusă de A. Finkel se extinde la reţele colorate în manieră directă:

Definiţia 3.4.5 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite.*
i) Se numeşte mulţime de acoperire *pentru reţeaua CPN orice submulţime de pseudo-marcări, $CS(CPN) \subseteq \mathbb{M}_\omega$, care satisface următoarele două condiţii:*

(1) pentru orice marcare accesibilă, $M \in [M_0\rangle_{CPN}$, există o marcare $M' \in CS(CPN)$ astfel încât $M \leq M'$;

(2) pentru orice marcare $M' \in CS(CPN) - [M_0\rangle_{CPN}$ există un şir strict crescător de marcări accesibile $\{M_n\}_{n\geq 0} \subseteq [M_0\rangle_{CPN}$ convergent la M'.

ii) O mulţime de acoperire $CS(CPN)$ se numeşte minimală *dacă nici o submulţime proprie a lui $CS(CPN)$ nu este mulţime de acoperire pentru reţeaua CPN.*

Cîteva proprietăţi ale mulţimilor de acoperire sunt enumerate în următoarea propoziţie:

Propoziţia 3.4.9 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite.*
a) Dacă $CS(CPN)$ este o mulţime de acoperire pentru CPN şi există douămarcări $M_1, M_2 \in CS(CPN)$, $M_1 \neq M_2$, astfel încât $M_1 \leq M_2$, atunci $CS'(CPN) = CS(CPN) - \{M_1\}$ este mulţime de acoperire pentru CPN;
b) O mulţime de acoperire minimală nu conţine două marcări distincte comparabile.
c) Dacă $CS(CPN)$ este o mulţime de acoperire pentru CPN şi $CS'(CPN)$ este mulţimea marcărilor maximale (în raport cu ordinea uzuală de pe $\mathbb{M}_\omega$) ale mulţimii $CS(CPN)$, atunci $CS'(CPN)$ este mulţime de acoperire minimală pentru CPN.
d) Pentru orice două mulţimi de acoperire, mulţimile marcărilor maximale ale acestora coincid şi sunt egale cu mulţimea de acoperire minimală.
e) Mulţimea de acoperire minimală pentru reţeaua CPN este finită şi unică, şi va fi notată cu $MCS(CPN)$.

În continuare, voi prezenta noţiunile de arbore, pădure şi graf de acoperire.

Definiţia 3.4.6 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite.*
i) Se numeşte arbore de acoperire *pentru reţeaua colorată CPN, orice arbore $(CS(CPN), BE)$-etichetat*

$$\mathcal{CT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)\,,$$

cu proprietăţile următoare:

(a) mulţimea etichetelor nodurilor este o mulţime de acoperire $CS(CPN)$ pentru reţeaua CPN;

(b) mulţimea etichetelor arcelor este mulţimea, BE, a tranziţiilor interpretate ale reţelei CPN;

(c) $\{l_V(v) \mid v \in V\} = CS(CPN)$ (i.e. funcţia l_V este surjectivă);

(d) mulţimea arcelor, E, este formată din toate arcele de tip (1) şi din arce de tip (2) (nu neapărat toate arcele de tip (2)), unde:

(1) $(v, v') \in E$ *se numeşte* arc de tip (1) *dacă* $l_V(v)[l_E(v, v')\rangle_{CPN} l_V(v')$;

(2) $(v, v') \in E$ *se numeşte* arc de tip (2) *dacă* $l_V(v)[l_E(v, v')\rangle_{CPN}$ *şi* $\neg\ l_V(v)[l_E(v, v')\rangle_{CPN} l_V(v')$, *şi* $\exists \{w_n\}_{n\geq 0} \subseteq BE^*$ *un şir de secvenţe de tranziţie astfel încât* $l_V(v)[w_n\rangle_{CPN} M_n, \forall\, n \geq 0$, *şi* $\lim M_n = l_V(v')$.

ii) Se numeşte arbore de acoperire minimal *pentru CPN, $\mathcal{MCT}(CPN)$, orice arbore de acoperire pentru CPN, pentru care mulţimea etichetelor nodurilor este chiar mulţimea de acoperire minimală $MCS(CPN)$.*

Observaţia 3.4.2 *$\mathcal{MCT}(CPN)$ nu este neapărat unic (deoarece doi arbori de acoperire minimali pot diferi prin arcele de tip (2) din care sunt formaţi).*

Definiţia 3.4.7 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite.*
i) Se numeşte pădure de acoperire *pentru CPN orice graf orientat (nu neapărat conex) etichetat pe noduri şi pe arce $\mathcal{CF}(CPN)$ obţinut dintr-un arbore de acoperire $\mathcal{CT}(CPN)$ prin eliminarea tuturor arcelor de tip (2) ale acestuia.*
ii) Se numeşte pădure de acoperire minimală *pentru CPN orice graf orientat (nu neapărat conex) etichetat pe noduri şi pe arce $\mathcal{MCF}(CPN)$ obţinut dintr-un arbore de acoperire minimal $\mathcal{MCT}(CPN)$ prin eliminarea tuturor arcelor de tip (2) ale acestuia.*

Observaţia 3.4.3 *Pădurea de acoperire minimală $\mathcal{MCF}(CPN)$ este unică (justificare: unicitatea decurge din faptul că $\mathcal{MCF}(CPN)$ este unic determinată de mulţimea etichetelor nodurilor, $MCS(CPN)$, şi de mulţimea arcelor, formată doar din arcele de tip (1)).*

Definiţia 3.4.8 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite.*
i) Se numeşte graf de acoperire *pentru CPN orice graf orientat BE-etichetat*

$$\mathcal{CG}(CPN) = (CS(CPN), BE, E)\,,$$

cu proprietăţile următoare:

(a) mulţimea nodurilor este o mulţime de acoperire $CS(CPN)$ pentru reţeaua CPN;

(b) mulţimea etichetelor (arcelor) este mulţimea, BE, a tranziţiilor interpretate ale reţelei CPN;

(c) mulţimea arcelor etichetate, E, este formată din toate arcele de tip (1):

$$\forall M, M' \in CS(CPN), \forall\, Y \in BE: \quad (M, Y, M') \in E \;\Leftrightarrow\; M[Y\rangle_{CPN} M'.$$

ii) Se numeşte graf de acoperire minimal *pentru CPN, $\mathcal{MCG}(CPN)$, orice graf de acoperire pentru CPN, pentru care mulţimea nodurilor este chiar mulţimea de acoperire minimală $MCS(CPN)$.*

Observaţia 3.4.4 *i) Orice* $\mathcal{CG}(CPN)$ *se obţine dintr-un arbore de acoperire* $\mathcal{CT}(CPN)$ *prin eliminarea arcelor de tip (2) şi identificarea nodurilor cu aceeaşi etichetă. Sau, altfel spus,* $\mathcal{CG}(CPN)$ *se obţine dintr-o pădure de acoperire* $\mathcal{CF}(CPN)$ *prin identificarea nodurilor cu aceeaşi etichetă.*
ii) Graful de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(CPN)$ *este unic (justificare: deoarece* $\mathcal{MCG}(CPN)$ *este unic determinat de mulţimea nodurilor,* $MCS(CPN)$*, şi de mulţimea arcelor etichetate, formată doar din arcele de tip (1)).*
iii) Graful $\mathcal{MCG}(CPN)$ *se obţine din orice arbore de acoperire minimal* $\mathcal{MCT}(CPN)$ *prin eliminarea arcelor de tip (2) şi identificarea nodurilor cu aceeaşi etichetă. Sau, altfel spus,* $\mathcal{MCG}(CPN)$ *se obţine din pădurea de acoperire minimală* $\mathcal{MCF}(CPN)$ *prin identificarea nodurilor cu aceeaşi etichetă.*

Rezultatul central din articolul [22] este un algoritm care construieşte graful de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(CPN)$ şi justifică următoarea teoremă:

Teorema 3.4.2 *Graful de acoperire minimal* $\mathcal{MCG}(CPN)$ *este unic, finit şi calculabil pentru clasa CP-reţelelor cu mulţimi de culori finite.*

Algoritmul lui A. Finkel, particularizat pentru construţia grafului de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(CPN)$ pentru clasa CP-reţelelor cu mulţimi de culori finite, este prezentat pe pagina următoare.

În încheiere, să amintim din nou faptul că, în lucrarea amintită ([22]), A. Finkel a evidenţiat importanţa practică deosebită a structurilor de acoperire minimale, arătând, prin cîteva exemple practice de reţele, că dimensiunea arborelui de acoperire minimal este mult mai mică (cu cîteva ordine de mărime, în general) decît dimensiunea arborelui de acoperire Karp–Miller, ceea ce este foarte util din punct de vedere practic pentru algoritmii de rezolvare a problemelor de decizie decidabile pe baza structurilor de acoperire.

```
procedure minimal_coverability_graph(CPN: CP-reţea; var MCS: mulţime
de pseudo-marcări; var MCG: graf);
{* rezultatul va fi returnat în MCG (graful minimal) şi în MCS (mulţimea
minimală) *}
begin
  minimal_coverability_tree(CPN, MCS, MCT);
  identify_nodes_having_same_label(MCT,MCG);
  for orice arc (M, Y, M') în MCG do
    if not M[Y⟩_CPN M' then remove_arc((M, Y, M'),MCG); endif;
  endfor;
end.

procedure minimal_coverability_tree(CPN: CP-reţea; var MCS: mulţime de
pseudo-marcări; var MCT: arbore);
{* rezultatul va fi returnat în MCT, şi în MCS *}
var unprocessednodes, processednodes: mulţime de noduri;
    n,n',n1: noduri; M,M',M1,M2: pseudo-marcări;
    Y: tranziţie interpretată; există_strămoş: boolean;
begin
  unprocessednodes := {create_node(r, M0, MCT)};
  processednodes := ∅;
  while unprocessednodes ≠ ∅ do
    selectează un nod n ∈ unprocessednodes;
    unprocessednodes := unprocessednodes−{n};
    case    // M este marcarea etichetă a nodului n, şi M1 a nodului n1
      1: există un nod n1 ∈ processednodes cu M = M1 :
           processednodes := processednodes+{n};
           exitcase;
      2: există un nod n1 ∈ processednodes cu M < M1 :
           remove_node(n, MCT);
           exitcase;
      3: există un nod n1 ∈ processednodes cu M > M1 :
           M2 := M; există_strămoş := false;
           for orice n1 ∈ processednodes cu M > M1 do
             if n1 este un strămoş al lui n then
                există_strămoş := true;
                for orice locaţie s şi orice culoare c cu M(s)(c) > M1(s)(c) do
                          M2(s)(c) := ω;
                endfor;
             endif;
           endfor;
```

```
        if există_strămoş then
          n1 := primul nod procesat, de pe calea de la r la n, cu M1 < M2;
          M1 := M2;
          remove_from(unprocessednodes)_all_nodes_of(tree(n1, MCT));
          remove_from(processednodes)_all_nodes_of(tree(n1, MCT));
          remove_tree_without_root(n1, MCT);
          unprocessednodes := unprocessednodes+{n1};
        else
          unprocessednodes := unprocessednodes+{n};
        endif;
        for orice n1 ∈ processednodes cu M1 < M2 do
          remove_from(unprocessednodes)_all_nodes_of(tree(n1, MCT));
          remove_from(processednodes)_all_nodes_of(tree(n1, MCT));
          remove_tree_with_root(n1, MCT);
        endfor;
        exitcase;
      4: otherwise :
        for orice tranziţie interpretată Y ∈ BE astfel încât M[Y⟩_CPN M' do
          create_node(n', M', MCT);
          create_arc(n, n', Y, MCT);
          unprocessednodes := unprocessednodes+{n'};
        endfor;
        processednodes := processednodes+{n};
        exitcase;
    endcase;
    unprocessednodes := maximal(unprocessednodes);
    MCS := {label(n) | n ∈ processednodes };
  endwhile;
end.
```

De asemenea, demn de amintit este faptul că s-au introdus şi *grafuri de acoperire cu simetrii*, o metodă obţinută prin combinarea metodei lui K. Jensen a marcărilor simetrice cu metoda lui A. Finkel a marcărilor de acoperire minimale, tehnică descrisă de L. Petrucci în lucrarea [77]. Algoritmul descris de el era dezvoltat pe baza unei variante preliminarii, neoptime, din lucrarea [21], a algoritmului lui Finkel.

În raportul tehnic [119] am descris algoritmul obţinut utilizînd ideea lui Petrucci aplicată la varianta finală, optimă, din lucrarea [22], a algoritmului lui Finkel. Iată acest algoritm:

```
procedure coverability_tree_with_symmetrical_markings (CPN; var CT);
begin
  unprocessednodes := {create_node(r, M0, CT)};
  processednodes := ∅;
  while unprocessednodes ≠ ∅ do
    selectează un nod n ∈ unprocessednodes;
    unprocessednodes := unprocessednodes−{n};
    case    // M este marcarea etichetă a nodului n, şi M1 a nodului n1
      1: există un nod n1 ∈ processednodes cu M = M1 ∨ M = sym(M1) :
           processednodes := processednodes+{n};
           exitcase;
      2: există un nod n1 ∈ processednodes cu M < M1 ∨ M < sym(M1) :
           remove_node(n, CT);
           exitcase;
      3: există un nod n1 ∈ processednodes cu M > M1 ∨ M > sym(M1) :
           M2 := M; există_strămoş := false;
           for orice n1 ∈ processednodes cu M > M1 ∨ M > sym(M1) do
             if n1 este un strămoş al lui n then
               există_strămoş := true;
               for orice locaţie s şi orice culoare c cu M(s)(c) > M1(s)(c) ∨
                    ∨ M(s)(c) > sym(M1)(s)(c) do    M2(s)(c) := ω;
               endfor;
             endif;
           endfor;
           if există_strămoş then
             n1 := primul nod procesat, de pe calea de la r la n, astfel
                    încât M2 > M1 ∨ M2 > sym(M1);
             M1 := M2;
             remove_from(unprocessednodes)_all_nodes_of(tree(n1, CT));
             remove_from(processednodes)_all_nodes_of(tree(n1, CT));
             remove_tree_without_root(n1, CT);
```

```
          unprocessednodes := unprocessednodes+{n1};
        else
          unprocessednodes := unprocessednodes+{n};
        endif;
        for orice n1 ∈ processednodes cu M2 > M1 ∨ M2 > sym(M1) do
          remove_from(unprocessednodes)_all_nodes_of(tree(n1, CT));
          remove_from(processednodes)_all_nodes_of(tree(n1, CT));
          remove_tree_with_root(n1, CT);
        endfor;
        exitcase;
    4: otherwise :
        for orice tranziţie interpretată Y ∈ BE astfel încât M[Y⟩CPN M' do
          create_node(n', M', CT);
          create_arc(n, n', Y, CT);
          unprocessednodes := unprocessednodes+{n'};
        endfor;
        processednodes := processednodes+{n};
        exitcase;
    endcase;
  endwhile;
end.
```

3.4.4 Probleme decidabile pe baza structurilor de acoperire

În continuare voi prezenta problemele de decizie pentru reţele colorate care sunt decidabile pe baza structurilor de acoperire (atît a celor de tip Karp–Miller, cît şi a celor minimale).

Mai precis, voi prezenta algoritmii de rezolvare pentru CP-reţele cu mulţimi de culori finite, a problemelor de decizie (CP) şi (QLP), (FRSP) şi (FRTP), (BP) şi (SuBP), algoritmi ce utilizează fie arborele sau graful de acoperire Karp–Miller, fie cele de acoperire minimale. Demonstraţia acestor rezultate decurge imediat din observaţia 3.4.1 şi rezultatele similare de la reţele P/T.

I) Algoritmi de rezolvare pe baza arborelui/grafului de acoperire Karp–Miller

Teorema 3.4.3 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite, avînd arborele de acoperire Karp-Miller $\mathcal{KMT}(CPN) = (V, E, l_V, l_E)$. Au loc următoarele afirmaţii:*

1. *Problema (CP): o marcare $M \in \mathbb{M}$ este acoperibilă dacă şi numai dacă $\exists\ v \in V$ astfel încât $M \leq l_V(v)$;*

2. *Problema (QLP): o tranziţie interpretată $Y \in BE$ este pseudo-viabilă dacă şi numai dacă $\exists\ v \in V$ astfel încât $Y^- \leq l_V(v)$, sau, echivalent, dacă şi numai dacă $\exists\ (v, v') \in E$ astfel încât $l_E(v, v') = Y$;*

3. *Problema (FRSP): mulţimea de accesibilitate $[M_0\rangle_{CPN}$ este infinită dacă şi numai dacă $\exists\ v \in V$ şi $\exists\ (s, c) \in TE$ astfel încât $l_V(v)(s, c) = \omega$;*

4. *Problema (BP): un punct colorat $(s, c) \in TE$ este nemărginit dacă şi numai dacă $\exists\ v \in V$ astfel încât $l_V(v)(s, c) = \omega$.*

   În plus, o mulţime de puncte colorate $X \subseteq TE$ este nemărginită dacă şi numai dacă fiecare punct colorat $(s, c) \in X$ este nemărginit, i.e. pentru orice $(s, c) \in X$, $\exists\ v \in V$ astfel încât $l_V(v)(s, c) = \omega$;

5. *Problema (SuBP): o mulţime de puncte colorate $X \subseteq TE$ este simultan nemărginită dacă şi numai dacă $\exists\ v \in V$ astfel încât $l_V(v)(s, c) = \omega$, $\forall (s, c) \in X$;*

6. *Problema (FRTP): arborele de accesibilitate $\mathcal{RT}(CPN)$ este infinit dacă şi numai dacă există cel puţin un drum de lungime nenulă, în arborele $\mathcal{KMT}(CPN)$, între două noduri având aceeaşi etichetă.*

Afirmaţii analoage cu 1.–6. au loc utilizând graful de acoperire Karp–Miller, $\mathcal{KMG}(CPN)$, în locul arborelui de acoperire Karp–Miller. Ultima afirmaţie se enunţă astfel:

6'. Problema (FRTP): arborele de accesibilitate $\mathcal{RT}(CPN)$ este infinit dacă şi numai dacă există cel puţin un circuit în graful $\mathcal{KMG}(CPN)$.

II) Algoritmi de rezolvare pe baza structurilor de acoperire minimale

Teorema 3.4.4 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite, avînd graful de acoperire minimal $\mathcal{MCG}(CPN) = (MCS(CPN), BE, E)$. Au loc următoarele afirmaţii:*

1. *Problema (CP): o marcare M este acoperibilă dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(CPN)$ astfel încât $M \leq M'$;*

2. *Problema (QLP): o tranziţie interpretată $Y \in BE$ este pseudo-viabilă dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(CPN)$ astfel încât $Y^- \leq M'$, sau, echivalent, dacă şi numai dacă există un arc de forma $(M', Y, M'') \in E$;*

3. *Problema (FRSP): mulţimea de accesibilitate $[M_0\rangle_{CPN}$ este infinită dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(CPN)$ şi $\exists\ (s, c) \in TE$ astfel încât $M'(s, c) = \omega$;*

4. *Problema (BP): un punct colorat $(s, c) \in TE$ este nemărginit dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(CPN)$ astfel încât $M'(s, c) = \omega$.*

   În plus, o mulţime de puncte colorate $X \subseteq TE$ este nemărginită dacă şi numai dacă fiecare punct colorat $(s, c) \in X$ este nemărginit, i.e. pentru orice $(s, c) \in X$, există un nod $M' \in MCS(CPN)$ astfel încât $M'(s, c) = \omega$;

5. *Problema (SuBP): o mulţime de puncte colorate $X \subseteq TE$ este simultan nemărginită dacă şi numai dacă există un nod $M' \in MCS(CPN)$ astfel încât $M'(s, c) = \omega, \forall (s, c) \in X$;*

6. *Problema (FRTP): arborele de accesibilitate $\mathcal{RT}(CPN)$ este infinit dacă şi numai dacă există cel puţin un circuit în graful $\mathcal{MCG}(CPN)$.*

Drept consecinţă, avem

Corolarul 3.4.3 *Predicatele (CP), (QLP), (FRSP), (FRTP), (BP) şi (SuBP) (cu toate formele lor) sunt calculabile pentru clasa CP-reţelor cu mulţimi de culori finite, atît pe baza grafului de acoperire Karp–Miller, cît şi pe baza grafului de acoperire minimal.*

Capitolul 4

Tehnica invarianţilor şi verificarea proprietăţilor

Tehnica invarianţilor constituie o metodă de analiză formală a reţelelor Petri, ce a fost introdusă de K. Lautenbach în [55] (a se vedea şi [56]).

Invarianţii sunt utilizaţi pentru studiul proprietăţilor reţelei, pe baza *structurii* reţelei, şi, de asemenea, pentru verificarea acestor proprietăţi, după cum vom vedea în acest capitol. În plus, matricea de adiacenţă, ce codifică structura reţelei, poate fi folosită, pe lîngă calculul invarianţilor, şi la calculul gradelor de concurenţă a reţelelor Petri, despre care vom discuta în capitolul 5.

Ideea de bază ce constituie fundamentul *invarianţilor locaţie* este aceea de a construi ecuaţii ce sunt satisfăcute de către toate marcările accesibile ale reţelei, o idee ce este similară cu cea a invarianţilor folosiţi în verificarea programelor. Mai întîi sunt formulate nişte ecuaţii, despre care se postulează că ar fi satisfăcute independent de paşii ce apar în sistem (i.e., de tranziţiile produse în reţea). Apoi se demonstrează faptul că ecuaţiile sunt într-adevăr satisfăcute, şi în final acestea sunt utilizate pentru a demonstra proprietăţi dinamice ale sistemului modelat prin reţeaua respectivă.

Invarianţii tranziţie sunt dualul invarianţilor locaţie. Ei determină secvenţe de tranziţie care au un efect total nul, i.e. secvenţe ce au aceeaşi marcare de început şi de sfîrşit.

Invarianţii sunt utili pentru a demonstra multe tipuri de proprietăţi dinamice ale reţelelor Petri, cum ar fi: proprietăţi de accesibilitate, de mărginire, de revenire, de viabilitate şi de echitate. Un alt avantaj al invarianţilor este acela că pot fi construiţi în timpul fazei de proiectare a unui sistem, şi aceasta poate contribui, de obicei, la realizarea unui proiect mai bun. Singurul dezavantaj al invarianţilor este acela că necesită deprinderi matematice mult mai considerabile decît multe dintre celelalte metode de analiză.

4.1 Invarianţi pentru reţele Petri P/T

În această secţiune voi prezenta o sinteză asupra tehnicilor de algebră liniară folosite în studiul proprietăţilor reţelelor Petri P/T, realizată pe baza lucrării (Jucan & Ţiplea [48]), cu completări din lucrările [80, 56].

Cele trei subsecţiuni ale acestei secţiuni fac o trecere în revistă a tehnicilor de algebră liniară, şi anume: matrici de incidenţă, S-invarianţi şi respectiv T-invarianţi, fiind urmate, în subsecţiunea a patra, de o prezentare a două exemple semnificative de sisteme reale modelate prin reţele P/T şi analizate utilizând tehnica invarianţilor.

În cele ce urmează, toate matricile şi vectorii ce vor fi consideraţi vor avea drept componente numere întregi. Combinaţiile liniare vor fi de asemenea înţelese a fi cu coeficienţi întregi. Vectorul (linie sau coloană) cu toate componentele 0, indiferent de dimensiunea lui, va fi notat prin $\mathbf{0}$. Inegalitatea nestrictă dintre doi vectori va fi înţeleasă ca inegalitate pe componente, iar inegalitatea strictă dintre doi vectori ca o inegalitate nestrictă cu inegalitate strictă pe cel puţin o componentă.

4.1.1 Matrici de incidenţă

Conceptul de matrice de incidenţă a unei reţele P/T $\Sigma = (S, T, F, W)$ necesită, *a priori*, o ordonare totală a mulţimilor S şi T. Fără a restrânge generalitatea vom presupune că, dacă aceste mulţimi sunt de forma

$$S = \{s_1, \dots, s_m\} \text{ şi } T = \{t_1, \dots, t_n\},$$

atunci ele sunt total ordonate prin ordinea naturală pe indicii elementelor:

- $S: \ s_1 < \dots < s_m$,
- $T: \ t_1 < \dots < t_n$.

Definiţia 4.1.1 *Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T. Matricea $m \times n$-dimensională I_Σ dată prin*

$$I_\Sigma(i, j) = \Delta t_j(s_i), \quad \forall\, 1 \le i \le m, \ \forall\, 1 \le j \le n,$$

este numită matricea de incidenţă *a reţelei Σ.*

Dacă I_Σ este matricea de incidenţă a reţelei Σ, atunci vom nota prin $I_\Sigma(i, -)$ şi $I_\Sigma(-, j)$ linia i şi, respectiv, coloana j a acestei matrici.

Conceptul de matrice de incidenţă se extinde şi la reţele P/T marcate prin intermediul reţelei suport.

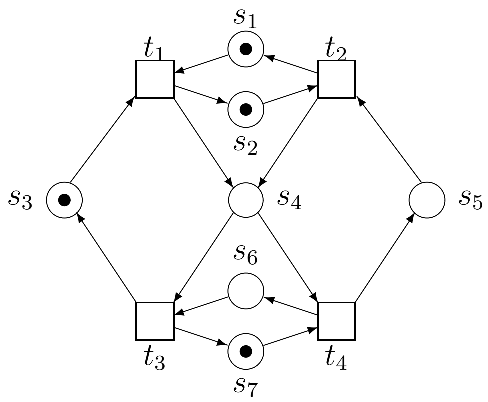


Figura 4.1: Reţeaua din exemplul 4.1.1

Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T, M o marcare a ei şi t_j o tranziţie posibilă la M. Dacă gândim marcările reţelei Σ ca vectori coloană m-dimensionali (m fiind numărul locaţiilor), atunci marcarea produsă prin aplicarea tranziţiei t_j la M poate fi calculată prin:

$$M' = M + I_\Sigma \cdot f\,,$$

unde f este un vector coloană n-dimensional (n este numărul tranziţiilor reţelei) ce are 1 în linia j şi 0 în rest.

Putem extinde această observaţie la:

Teorema 4.1.1 *Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T şi M_1, M_2 două marcări ale ei. Dacă M_2 este accesibilă de la M_1, atunci există un vector coloană pozitiv f astfel încât $M_2 = M_1 + I_\Sigma \cdot f$.*

Demonstraţie. ([48], pag.79) Dacă $M_2 \in [M_1\rangle$, atunci există o secvenţă de tranziţie $w \in T^*$ astfel încât $M_1[w\rangle M_2$. Considerăm vectorul coloană f dat prin: $f(j) = \#(t_j, w)$, $\forall\, 1 \le j \le n$. Este clar că $M_2 = M_1 + I_\Sigma \cdot f$. $\square$

Să notăm faptul că, fiind dată o matrice I cu coeficienţi în $\mathbb{Z}$, există o infinitate de reţele P/T ce au matricea de incidenţă I dar, există o unică reţea pură cu matricea de incidenţă I.

Exemplul 4.1.1 *Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ reţeaua P/T din figura 4.1. Matricea* *de incidenţă a ei este*

$$I_\Sigma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Secvenţa t_1t_4 *este posibilă la marcarea* M *dată prin*

$$\begin{array}{lllllllll} M(s_1) & = & M(s_2) & = & M(s_3) & = & M(s_7) & = & 1 \\ M(s_4) & = & M(s_5) & = & M(s_6) & = & 0, & & \end{array}$$

iar marcarea nou obţinută va fi

$$M + I_\Sigma(-,1) + I_\Sigma(-,4) = M + I_\Sigma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Trebuie să remarcăm că reciproca teoremei 4.1.1 nu este, în general, adevărată. Pentru reţeaua din exemplul 4.1.1 are loc

$$\mathbf{0} + I_\Sigma \cdot \mathbf{1} = \mathbf{0},$$

unde **1** este vectorul format numai din 1, dar nici o secvenţă de tranziţie nu este aplicabilă la marcarea **0**.

4.1.2 Invarianţi locaţie

În modelarea sistemelor dinamice prin reţele P/T este foarte important de ştiut dacă numărul de puncte din reţea se conservă sau nu de-a lungul evoluţiei sistemului; pierderile "necontrolate" de puncte sunt nedorite. Evoluţia (comportarea) dinamică a reţelelor P/T marcate depinde de structura reţelei şi de marcarea iniţială. Ambii factori sunt cunoscuţi *a priori* şi, deci, pot fi investigaţi independent de comportarea dinamică a reţelei. Aşa cum vom vedea în continuare, influenţa majoră este dată, de fapt, de structura reţelei.

Notaţiile utilizate vor fi cele din subsecţiunea anterioară.

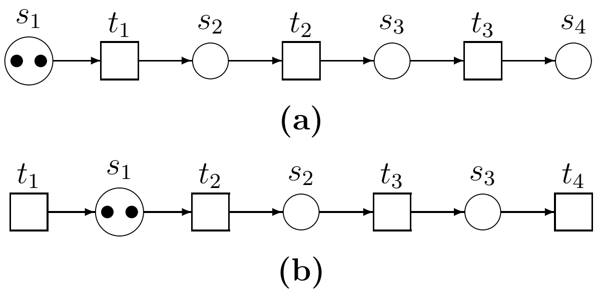


Figura 4.2: Reţelele din exemplul 4.1.2

Exemplul 4.1.2 *Considerăm reţelele P/T marcate γ_1, γ_2 din figurile 4.2(a) şi respectiv 4.2(b).*

În reţeaua γ_1 numărul total de puncte se conservă, pe când în reţeaua γ_2 toate punctele pot fi eliminate. Însă, pe de altă parte, marcarea iniţială a reţelei γ_2 poate fi reprodusă pe când a reţelei γ_1 nu mai poate fi reprodusă.

Acest exemplu ne arată că pierderea punctelor într-o reţea nu depinde de capacitatea de reproducere a marcărilor reţelei.

Exemplul 4.1.3 *În reţeaua marcată din figura 4.3(a) nu se poate pierde nici un punct; marcarea iniţială a acestei reţele poate fi reprodusă dacă toate tranziţiile apar de acelaşi număr de ori.*

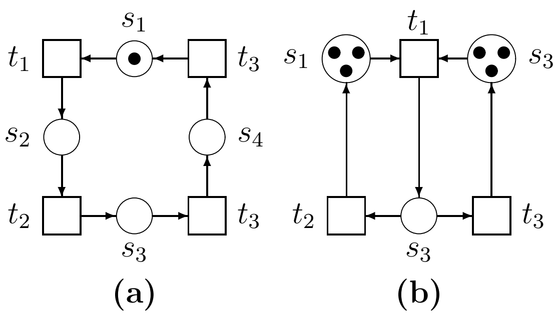


Figura 4.3: Reţelele din exemplul 4.1.3

În reţeaua din figura 4.3(b), fiecare aplicare a tranziţiei t_1 conduce la pierderea unui punct, fără posibilitatea de a fi reintrodus în reţea. Reproducerea marcării iniţiale este astfel imposibilă.

Exemplul 4.1.4 *Fiecare apariţie a tranziţiei t_1 în oricare din cele două reţele din figura 4.4 conduce la eliminarea unui punct din reţea. Această eli-*

minare nu este ireparabilă deoarece aplicarea tranziţiei t_2 introduce un punct în reţea.

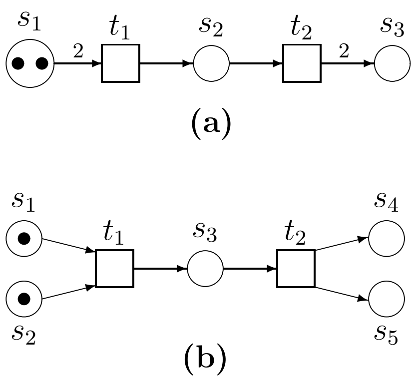


Figura 4.4: Reţelele din exemplul 4.1.4

Am putea spune că apariţia tranziţiei t_1 conduce la "condensarea" a două puncte în unul singur, pe când apariţia tranziţiei t_2 le "separă" din nou. Acest fapt ar putea fi interpretat prin: punctul din locaţia s_2 (respectiv s_3) are pondere dublă faţă de punctele din celelalte locaţii. O analiză atentă a acestui aspect ne spune că de fapt proprietatea enunţată mai sus nu este o proprietatate a punctelor ci a locaţiilor (a structurii reţelei). Suntem astfel conduşi la a ataşa ponderi locaţiilor şi a măsura pierderea punctelor în reţea prin intermediul acestor ponderi. Astfel, dacă ataşăm locaţiilor reţelei din figura 4.4(a) ponderile

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şi observăm că toate marcările accesibile sunt

$$M = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ M' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ M'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

atunci are loc proprietatea de invarianţă

$$g^t \cdot M = g^t \cdot M' = g^t \cdot M'' = 2,$$

unde g^t reprezintă transpusa matricii g.

Întrebarea care se pune acum, ca urmare a exemplului anterior, este următoarea: cum putem calcula un vector de ponderi al locaţiilor (atunci când el există)? Pentru a răspunde la această întrebare să observăm că vectorul de ponderi g, pe care dorim să-l calculăm, trebuie să satisfacă relaţia:

$$g^t \cdot M = g^t \cdot M',$$

pentru orice $M, M' \in [M_0\rangle$. Pentru două marcări arbitrare $M, M' \in [M_0\rangle$ există vectorii coloană f, f' astfel încât $M = M_0 + I_\Sigma \cdot f$ şi $M' = M_0 + I_\Sigma \cdot f'$. Relaţia de mai sus conduce la

$$g^t \cdot I_\Sigma \cdot (f - f') = 0$$

care poate fi îndeplinită doar dacă $g^t \cdot I_\Sigma = \mathbf{0}$ (vectorii f şi f' sunt arbitrari). Deci, vectorul de ponderi verifică ecuaţia:

$$X^t \cdot I_\Sigma = \mathbf{0}.$$

Definiţia 4.1.2 *Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T.*

(1) Se numeşte S-invariant *al reţelei Σ orice vector m-dimensional J de numere întregi ce verifică relaţia $J^t \cdot I_\Sigma = \mathbf{0}$.*

(2) Dacă J este S-invariant al reţelei Σ, atunci mulţimea

$$P_J = \{s_i \in S \mid J(i) \neq 0\}$$

este numită suportul *S-invariantului J.*

(3) S-invariantul J este numit pozitiv *dacă $J \geq \mathbf{0}$.*

(4) Un S-invariant pozitiv $J > \mathbf{0}$ este numit minimal *dacă nu există un alt S-invariant J' astfel încât $\mathbf{0} < J' < J$.*

(5) Reţeaua P/T indusă de S-invariantul J este definită prin

$$\Sigma\,|_J = (S', T', F', W'),$$

unde:

(i) $S' = P_J$;

(ii) $T' = {}^\bullet S' \cup S'^\bullet$;

(iii) $F' = F \cap ((S' \times T') \cup (T' \times S'))$;

(iv) $W' = W|_{(S' \times T') \cup (T' \times S')}$.

Este uşor de observat că orice combinaţie liniară de S-invarianţi este S-invariant:

Lema 4.1.1 *Dacă J_1 şi J_2 sunt S-invarianţi ai unei P/T-reţele Σ, iar $z \in \mathbb{Z}$, atunci $J_1 + J_2$ şi $z \cdot J_1$ sunt de asemenea S-invarianţi ai reţelei Σ.*

Este clar că orice reţea P/T are cel puţin un S-invariant, $J = \mathbf{0}$, dar este natural să fim interesaţi de S-invarianţi nenuli. De aceea, vom spune că o reţea *are S-invarianţi* dacă are cel puţin un S-invariant nenul.

Exemplul 4.1.5 *Reţelele din figurile 4.2(b) şi 4.3(b) nu au S-invarianţi, pe când cele din figurile 4.2(a) şi 4.3(a) au pe*

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

drept S-invariant minimal.

Reţeaua din figura 4.4(a) are S-invariantul minimal

$$g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

iar reţeaua din figura 4.4(b) are 4 S-invarianţi minimali

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; J_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; J_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Să considerăm acum reţeaua din figura 4.1. Următorii 5 vectori sunt S-invarianţi ai acestei reţele:

$$J_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; J_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; J_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; J_4' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; J_5' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Reţelele induse de S-invarianţii J_3' şi J_5' sunt reprezentate grafic în figura 4.5.

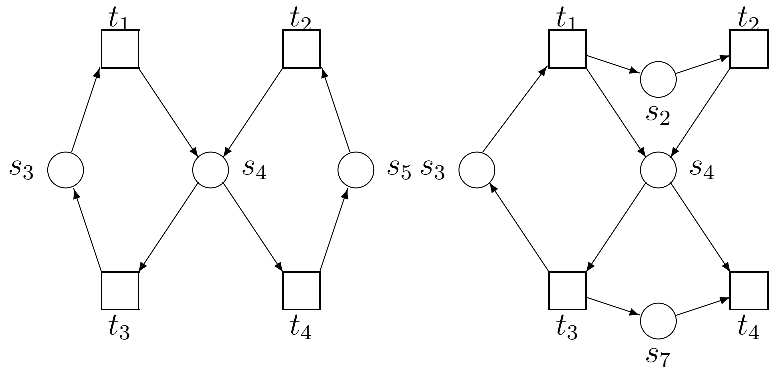


Figura 4.5: Reţelele induse din exemplul 4.1.5

Teorema 4.1.2 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată. Dacă J este un S-invariant nenul, atunci, pentru orice $M \in [M_0\rangle$, are loc:*

$$J^t \cdot M = J^t \cdot M_0.$$

Demonstraţie. Această proprietate se demonstrează uşor, folosind teorema 4.1.1 (demonstraţia poate fi consultată în lucrarea [48], pag. 85). □

Această teoremă ne spune, printre altele, că dacă J este un S-invariant al unei reţele P/T marcate $\gamma = (\Sigma, M_0)$ şi Σ este reţeaua indusă de J, atunci punctele din γ se conservă, în sensul:

$$J^t \cdot M = J^t \cdot M_0 = \text{constant},$$

pentru orice $M \in [M_0\rangle$. Mai mult, am putea spune că un S-invariant al unei reţele P/T marcate γ furnizează ponderile locaţiilor unei subreţele a reţelei γ în care punctele se conservă (prin intermediul acelor ponderi).

Întrebarea naturală care se pune acum este în legătură cu reciproca teoremei 4.1.2. Sub incidenţa unei condiţii suplimentare vom vedea că ea este îndeplinită.

Teorema 4.1.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată şi pseudo-viabilă. Dacă J este un vector nenul de numere întregi ce verifică*

$$J^t \cdot M = J^t \cdot M_0$$

pentru orice $M \in [M_0\rangle$, atunci J este S-invariant al reţelei γ.

Demonstraţie. Pentru demonstraţia acestei reciproce a se consulta lucrarea [48], pag. 86. □

Teorema 4.1.4 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată, pseudo-viabilă şi fără locaţii izolate. Dacă $J > \mathbf{0}$ este un S-invariant al ei atunci*

$$J^t \cdot M > 0\,,$$

pentru orice $M \in [M_0\rangle$.

Demonstraţie. Nici demonstraţia acestui rezultat nu este dificilă (a se vedea lucrarea [48], pag. 87). □

Definiţia 4.1.3 *Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T. Spunem că Σ este* acoperită cu S-invarianţi *dacă pentru fiecare locaţie $s \in S$ există un S-invariant pozitiv J_s cu $s \in P_{J_s}$.*

Exemplul 4.1.6 *Reţelele din figurile 4.2(a), 4.3(a), 4.4(a) şi 4.4(b) sunt acoperite cu S-invarianţi, iar reţelele din figurile 4.2(b) şi 4.3(b) nu sunt acoperite cu S-invarianţi (justificare: a se vedea exemplul 4.1.5).*

Lema 4.1.2 *Dacă $\Sigma = (S, T, F, W)$ este o reţea P/T acoperită cu S-invarianţi, atunci există un S-invariant J cu $P_J = S$.*

Demonstraţie. Prin ipoteză, pentru fiecare locaţie $s \in S$ a reţelei Σ există un S-invariant pozitiv J_s cu $s \in P_{J_s}$. Folosind lema 4.1.1, $J = \sum_{s \in S} J_s$ este un S-invariant cu $P_J = S$. □

Următorul rezultat ne arată cum poate fi studiată cu ajutorul invarianţilor proprietatea de mărginire.

Teorema 4.1.5 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată.*

(1) Dacă $J > \mathbf{0}$ este un S-invariant al reţelei γ, atunci orice locaţie $s \in P_J$ este mărginită.

(2) Dacă γ este acoperită cu S-invarianţi, atunci γ este mărginită.

Demonstraţie. Aceste afirmaţii sunt uşor de demonstrat (vezi lucrarea [48], pag. 88). □

Reciproca afirmaţiei (2) din această teoremă nu este adevărată, chiar şi dacă reţeaua este viabilă (un contraexemplu în acest sens poate fi consultat în lucrarea [80], pag. 81).

4.1.3 Invarianţi tranziţie

Un alt aspect important în analiza reţelelor P/T, pe lângă conservarea punctelor în reţea, îl constituie reproductibilitatea marcărilor (a se vedea exemplul 4.1.2).

Notaţiile utilizate vor fi cele din subsecţiunea 4.1.1.

Definiţia 4.1.4 *O marcare M a unei reţele P/T Σ este numită* reproductibilă *dacă există o secvenţă de tranziţii $w \neq \lambda$ astfel încât $M\,[w\rangle_\Sigma\, M$.*

Propoziţia 4.1.1 *Dacă M este o marcare reproductibilă a unei reţele P/T Σ, atunci orice marcare $M' \geq M$ a reţelei Σ este reproductibilă.*

Demonstraţie. Din ipoteză deducem că există o secvenţă de tranziţie $w \neq \lambda$ astfel încât $M\,[w\rangle_\Sigma\, M$, şi datorită proprietăţii de monotonie a producerii unei tranziţii, şi anume:

$$M_1\,[t\rangle_\Sigma\, M_2 \wedge M_1' \geq M_1 \;\Rightarrow\; M_1'\,[t\rangle_\Sigma\, M_2',\;\text{ cu } M_2' = M_1' + M_2 - M_1,$$

rezultă că $M'\,[w\rangle_\Sigma\, M'$, pentru orice marcare $M' \geq M$. $\square$

Să observăm că, dacă M este reproductibilă, atunci $M\,[w\rangle_\Sigma\, M$ şi conform teoremei 4.1.1 există un vector pozitiv f astfel încât $M + I_\Sigma \cdot f = M$, adică $I_\Sigma \cdot f = \mathbf{0}$.

Definiţia 4.1.5 *Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T.*

(1) Se numeşte T-invariant *al reţelei Σ orice vector n-dimensional J de numere întregi ce verifică relaţia $I_\Sigma \cdot J = \mathbf{0}$.*

(2) Dacă J este T-invariant al reţelei Σ, atunci mulţimea

$$P_J = \{t_i \in T \mid J(i) \neq 0\}$$

este numită suportul *T-invariantului J.*

(3) T-invariantul J este numit pozitiv *dacă $J \geq \mathbf{0}$.*

(4) Un T-invariant pozitiv $J > \mathbf{0}$ este numit minimal *dacă nu există un alt T-invariant J' astfel încât $\mathbf{0} < J' < J$.*

(5) Reţeaua P/T indusă de T-invariantul J este definită prin

$$\Sigma\,|_J = (S', T', F', W'),$$

unde:

(i) $T' = P_J$;

(ii) $S' = {}^\bullet T' \cup T'^\bullet$;

(iii) $F' = F \cap ((S' \times T') \cup (T' \times S'))$;

(iv) $W' = W|_{(S' \times T') \cup (T' \times S')}$.

Este uşor de observat că orice combinaţie liniară de T-invarianţi este T-invariant:

Lema 4.1.3 *Dacă J_1 şi J_2 sunt T-invarianţi ai unei reţele P/T Σ, iar $z \in \mathbb{Z}$, atunci $J_1 + J_2$ şi $z \cdot J_1$ sunt de asemenea T-invarianţi ai reţelei Σ.*

Este clar că orice reţea P/T are cel puţin un T-invariant, $J = \mathbf{0}$, dar este natural să fim interesaţi de T-invarianţi nenuli. De aceea, vom spune că o reţea *are T-invarianţi* dacă are cel puţin un T-invariant nenul.

Exemplul 4.1.7 *Reţelele din figurile 4.2(a) şi 4.3(b) nu au T-invarianţi. Vectorul*

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

este T-invariant minimal pentru reţelele din figurile 4.1, 4.2(b), 4.3(a).

Este clar că dacă o reţea P/T are marcări reproductibile, atunci ea are T-invarianţi. Reciproca este, de asemenea, adevărată.

Teorema 4.1.6 *O reţea P/T Σ are T-invarianţi pozitivi $J > \mathbf{0}$ dacă şi numai dacă Σ are marcări reproductibile.*

Demonstraţie. Această afirmaţie este uşor de demonstrat (a se consulta lucrarea [48], pag. 89). □

Definiţia 4.1.6 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată. T-invariantul J se numeşte* realizabil *dacă există o marcare accesibilă $M \in [M_0\rangle$ şi o secvenţă de tranziţie $w \in T^*$ astfel încât $M\,[w\rangle\,M'$ şi $J(i) = \#(t_i, w)$, $\forall\, 1 \leq i \leq n$.*

Nu orice T-invariant pozitiv J al unei reţele P/T Σ este realizabil; chiar şi dacă reţeaua este viabilă şi mărginită şi fiecare marcare a lui Σ este reproductibilă, iar J este minimal. Iată un exemplu în acest sens ([80], pag. 96):

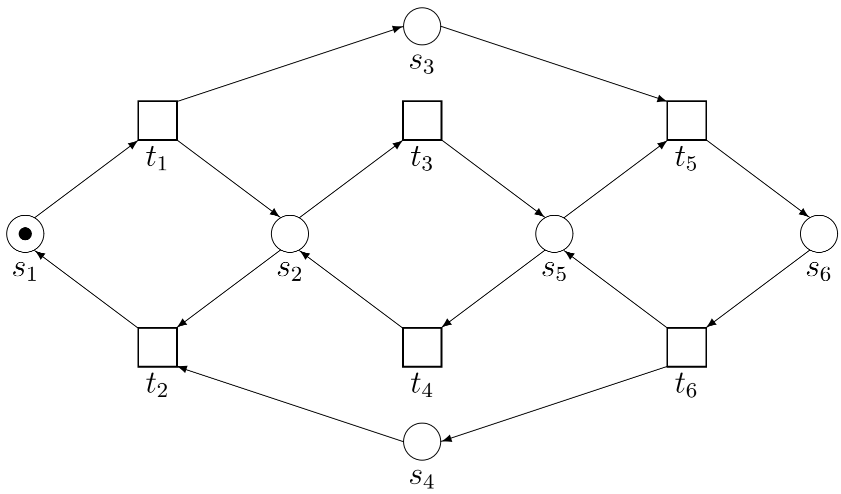


Figura 4.6: Reţeaua din exemplul 4.1.8

Exemplul 4.1.8 *Reţeaua P/T din figura 4.6 are 2 T-invarianţi minimali:*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

orice alt T-invariant al acestei reţele fiind o combinaţie liniară de forma $z_1 \cdot J_1 + z_2 \cdot J_2$*, cu* $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$*.*

Se observă cu uşurinţă că reţeaua este viabilă şi mărginită şi fiecare marcare accesibilă a reţelei este reproductibilă, şi că T-invariantul J_2 *este realizabil, însă* J_1 *nu este realizabil.*

În încheierea acestei subsecţiuni, vom arăta că reţelele P/T viabile şi mărginite sunt acoperite cu T-invarianţi.

Definiţia 4.1.7 *Fie* $\Sigma = (S, T, F, W)$ *o reţea P/T. Spunem că* Σ *este* acoperită cu T-invarianţi *dacă pentru fiecare tranziţie* $t \in T$ *există un T-invariant pozitiv* J_t *cu* $t \in P_{J_t}$*.*

Exemplul 4.1.9 *Reţelele din figurile 4.1, 4.2(b) şi 4.3(a) sunt acoperite cu T-invarianţi, iar reţelele din figurile 4.2(a) şi 4.3(b) nu sunt acoperite cu T-invarianţi (justificare: a se vedea exemplul 4.1.7).*

Lema 4.1.4 *Dacă $\Sigma = (S, T, F, W)$ este o reţea P/T acoperită cu T-invarianţi, atunci există un T-invariant J cu $P_J = T$.*

Demonstraţie. Prin ipoteză, pentru fiecare tranziţie $t \in T$ a reţelei Σ există un T-invariant pozitiv J_t cu $t \in P_{J_t}$. Folosind lema 4.1.3, $J = \sum_{t \in T} J_t$ este un T-invariant cu $P_J = T$. □

Teorema 4.1.7 ([80]) *Orice reţea P/T marcată viabilă şi mărginită este acoperită cu T-invarianţi.*

Demonstraţie. Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o $mPTN$ mărginită şi viabilă. Deoarece γ este mărginită, există un întreg $k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $M \in [M_0\rangle_\Sigma$ şi orice $s \in S$ să avem $M(s) \leq k$. Deducem că mulţimea $[M_0\rangle_\Sigma$ este finită, putând avea cel mult $(k+1)^{|S|}$ elemente. Fie $q = |[M_0\rangle_\Sigma| \in \mathbb{N}$.

Fie $t \in T$ o tranziţie arbitrară a reţelei γ, fixată. Reţeaua fiind viabilă, t este viabilă, şi deci are loc: $\forall\, M \in [M_0\rangle_\Sigma, \exists\, M' \in [M\rangle_\Sigma$ astfel încât $M'[t\rangle_\Sigma$, sau echivalent:

$$(*)\quad \forall\, M \in [M_0\rangle_\Sigma, \exists\, M'' \in [M_0\rangle_\Sigma \wedge \exists\, w \in T^* \text{ astfel încât } M\,[wt\rangle_\Sigma\, M'',$$

unde $M'' = M' + \Delta t$.

Fie $M_1 \in [M_0\rangle_\Sigma$ o marcare oarecare. Conform $(*)$ există $M_2 \in [M_0\rangle_\Sigma$ şi $w_1 \in T^*$ astfel încât $M_1\,[w_1 t\rangle_\Sigma\, M_2$. Aplicând $(*)$ pentru marcarea M_2, deducem că există $M_3 \in [M_0\rangle_\Sigma$ şi $w_2 \in T^*$ astfel încât $M_2\,[w_2 t\rangle_\Sigma\, M_3$. Iterând de q ori acest raţionament, obţinem că există $M_2, M_3, \ldots, M_{q+1} \in [M_0\rangle_\Sigma$ şi $w_1, w_2, \ldots, w_q \in T^*$ astfel încât

$$M_1\ [w_1 t\rangle_\Sigma\ M_2\ [w_2 t\rangle_\Sigma\ M_3\ \ldots\ M_q\ [w_q t\rangle_\Sigma\ M_{q+1}\,.$$

Deci avem $q+1$ marcări $M_1, M_2, \ldots, M_{q+1}$, şi cum $|[M_0\rangle_\Sigma| = q$, trebuie să existe doi indici l, k cu $1 \leq l < k \leq q$ astfel încât $M_l = M_k$.

Considerăm subsecvenţa de tranziţii

$$M_l\ [w_l t\rangle_\Sigma\ M_{l+1}\ [w_{l+1} t\rangle_\Sigma\ \ldots\ M_{k-1}\ [w_{k-1} t\rangle_\Sigma\ M_k\,,$$

în care t apare cel puţin o dată deoarece $l < k$; deci $M_l\,[w\rangle_\Sigma\, M_k$, unde $w = w_l t w_{l+1} t \ldots w_{k-1} t$. Conform teoremei 4.1.1, există un vector coloană pozitiv $J_t : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{N}$ astfel încât $M_k = M_l + I_\Sigma \cdot J_t$; mai mult, avem că $J_t(j) = \#(t_j, w)$, pentru orice $1 \leq j \leq n$. Cum $M_l = M_k$, rezultă că $I_\Sigma \cdot J_t = \mathbf{0}$, deci J_t este un T-invariant pozitiv al reţelei γ, şi, în plus, $t \in P_{J_t}$ deoarece t apare cel puţin o dată în secvenţa w.

Întrucît $t \in T$ a fost aleasă arbitrară, deducem că pentru orice $t \in T$ există un T-invariant pozitiv J_t astfel încât $t \in P_{J_t}$, ceea ce înseamnă că reţeaua γ este acoperită cu T-invarianţi. □

4.1.4 Exemple de modelare şi verificare

În această subsecţiune vom prezenta două exemple majore de utilizare a reţelelor P/T în modelarea şi analiza sistemelor reale.

I) Modelul expeditor – destinatar

Considerăm un sistem format dintr-un expeditor şi un destinatar. Expeditorul trimite spre destinatar produse sub formă de mesaje, unul câte unul, folosind un buffer (o locaţie) de capacitate n ($n \geq 1$) pentru depozitarea lor.

Modelarea acestui sistem ar putea fi realizată prin reţeaua P/T marcată din figura 4.7, cu următoarele interpretări ale locaţiilor:

- s_1 marcată = expeditorul a transmis un mesaj;
- s_2 marcată = expeditorul este pregătit pentru o nouă transmisie;
- s_3 marcată = expeditorul este în stare de repaus;
- s_4 = bufferul pentru depozitarea mesajelor;
- s_5 marcată = destinatarul a recepţionat un mesaj;
- s_6 marcată = destinatarul este pregătit pentru o nouă recepţie;
- s_7 marcată = destinatarul este în stare de repaus.

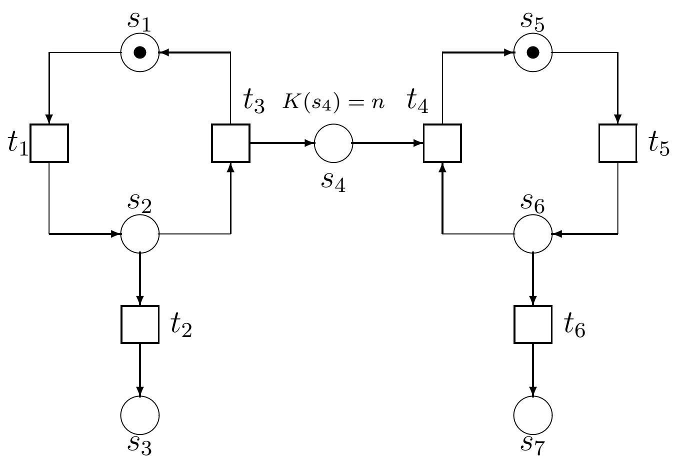


Figura 4.7: Primul model al sistemului expeditor – destinatar

Acest model poate fi considerat nesatisfăcător ca urmare a faptului că destinatarul poate trece în starea de repaus în timp ce expeditorul trimite mesaje sau bufferul nu este gol (gândindu-ne la expeditori şi destinatari umani, obiecţia noastră ar putea fi considerată nejustificată. Însă, în cadrul sistemelor automatizate lucrurile stau cu totul altfel şi această obiecţie este reală).

Ar trebui să impunem restricţia ca destinatarul să poată trece în stare de repaus numai dacă expeditorul este în stare de repaus şi locaţia de depozitare a mesajelor este goală. Modelarea acestei restricţii o realizăm adăugând două noi locaţii s_8 şi s_9. Locaţia s_8 va fi complementară locaţiei s_4 în sensul că, pentru orice $M \in [M_0\rangle$, vom avea $M(s_4) + M(s_8) = n$. Obţinem astfel $M(s_4) = 0$ dacă şi numai dacă $M(s_8) = n$. Vom defini, de asemenea, $W(s_8, t_6) = n$ ceea ce va face ca t_6 să se producă numai dacă $M(s_8) = n$ (echivalent, $M(s_4) = 0$). Trecerea expeditorului în starea de repaus va fi semnalată prin trimiterea unui punct în locaţia s_9 ceea ce va permite destinatarului să intre în starea de repaus.

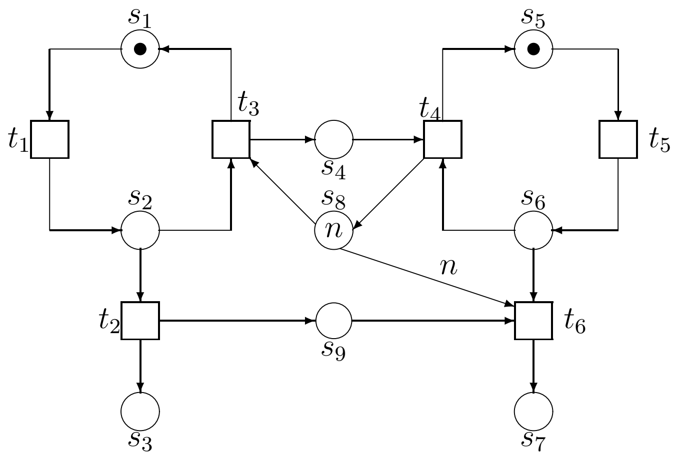


Figura 4.8: Al doilea model al sistemului expeditor – destinatar

Reţeaua P/T din figura 4.8 modelează sistemul expeditor – destinatar cu această nouă restricţie (în marcarea iniţială, locaţia s_8 conţine n puncte).

Trebuie să remarcăm că trecerea expeditorului sau a destinatarului în starea de repaus este ireversibilă, în sensul că aceştia nu îşi mai pot relua activitatea. Pentru a permite reluarea activităţii vom adăuga reţelei din figura 4.8 locaţiile s_{10}, s_{11}, s_{12} şi s_{13} ca în figura 4.9 (constatăm că nu este necesar a marca iniţial locaţia s_8 cu n puncte; tranziţia t_8 va introduce aceste n puncte, fără de care sistemul nu poate evolua propriu).

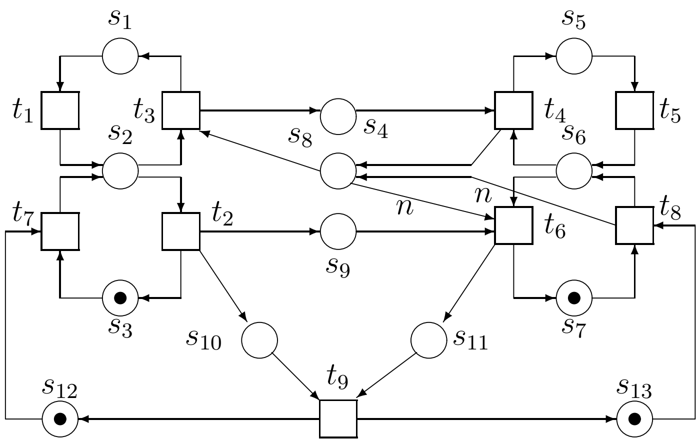


Figura 4.9: Al treilea model al sistemului expeditor – destinatar

Spunem că un sistem expeditor – destinatar este *modelat corect* dacă sunt îndeplinite următoarele proprietăţi:

($\mathbf{P_1}$) expeditorul poate fi numai în una din stările *repaus*, *pregătit pentru transmisie* sau *transmis*. Analog, destinatarul poate fi numai în una din stările *repaus*, *pregătit pentru recepţie* sau *recepţionat*;

($\mathbf{P_2}$) bufferul de depozitare a mesajelor conţine, în orice moment, cel mult n mesaje;

($\mathbf{P_3}$) expeditorul (respectiv destinatarul) poate intra în starea de repaus numai dacă a semnalat în prealabil aceasta controlorului din mediul exterior (locaţiile s_{10} şi s_{11} din figura 4.9 sunt utilizate pentru semnalare). Părăsirea stării de repaus se poate face de asemenea numai prin primirea unui semnal din partea controlorului din mediul exterior (tranziţia t_9 din figura 4.9 este utilizată pentru această semnalare);

($\mathbf{P_4}$) părăsirea stării de repaus de către expeditor se poate face numai dacă destinatarul a ajuns şi el în starea de repaus;

($\mathbf{P_5}$) decizia destinatarului fie de a recepţiona, fie de a trece în starea de repaus, depinde de comportamentul expeditorului; în acest sens, nu pot apare conflicte;

($\mathbf{P_6}$) destinatarul poate trece în starea de repaus numai dacă bufferul este gol şi expeditorul este în repaus.

Un simplu calcul ne arată că

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix},\ J_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix},\ J_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\n\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix},$$

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix},\ J_5 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\-1\\0\\0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix},\ J_6 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\-1\\1\\0\\0 \end{pmatrix},$$

sunt S-invarianţi ai reţelei (ordinea pe locaţii este dată de ordinea pe indici). Pe baza acestor S-invarianţi se poate demonstra, utilizînd teoria invarianţilor, că reţeaua din figura 4.9 are aceste proprietăţi şi, astfel, ea modelează corect sistemul expeditor – destinatar (pentru detalii a se consulta lucrarea [48], pag. 108-110).

II) Procese în citire/scriere

Considerăm un sistem format din n procese, $n > 0$, care pot citi sau scrie într-o anumită zonă de memorie. Citirea din memorie se poate face concurent, dar atunci când un proces este în scriere celelalte $n-1$ procese nu pot scrie sau citi. Fiecare proces poate fi într-una din următoarele stări:

- s_1 = prelucrare locală ce nu utilizează memoria;
- s_2 = aşteaptă să citească;
- s_3 = citeşte;
- s_4 = aşteaptă să scrie;
- s_5 = scrie.

Vom considera în plus o locaţie de sincronizare s care va bloca celelalte procese atunci când unul dintre ele este în scriere. Reţeaua din figura 4.10 modelează sistemul prezentat (o aplicare a tranziţiei t_1, respectiv t_4, semnifică faptul că unul din cele n procese solicită o operaţie de citire, respectiv scriere).

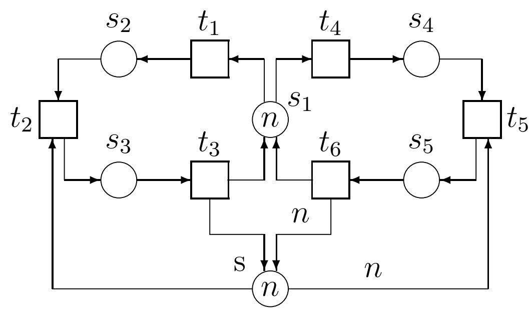


Figura 4.10: Reţeaua ce modelează sistemul proceselor

Proprietăţile ce trebuie îndeplinite de o reţea pentru a fi considerată un *model corect* al acestui sistem sunt:

($\mathbf{Q_1}$) numărul proceselor sistemului, active sau neactive, în orice moment, este constant şi egal cu n;

($\mathbf{Q_2}$) dacă un proces se află în scriere, la un moment dat, atunci celelalte $n-1$ procese nu pot scrie sau citi;

($\mathbf{Q_3}$) numărul proceselor ce pot fi în citire, la un moment dat, este cuprins între 0 şi n.

($\mathbf{Q_4}$) sistemul este viabil, adică nu se blochează niciodată.

Printr-un simplu calcul se arată că

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ n \\ 1 \end{pmatrix}, \; J_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sunt S-invarianţi (ordinea pe locaţii este dată de ordinea pe indici, s fiind ultima locaţie).

Pe baza acestor S-invarianţi se poate demonstra că reţeaua din figura 4.10 are aceste proprietăţi şi, astfel, ea modelează corect sistemul proceselor în citire/scriere (pentru detalii a se consulta lucrarea [48], pag. 111-112).

Alte aplicaţii

Mai există şi alte modalităţi de utilizare a anumitor tehnici de algebră liniară în studiul proprietăţilor reţelelor Petri. Spre exemplu, pot fi aplicate pentru a se calcula gradul de concurenţă la o marcare a reţelelor P/T.

Mai precis, după cum vom vedea în capitolul 5, calculul gradului de concurenţă la o marcare se reduce la rezolvarea unei probleme de programare liniară întreagă, avînd ca şi coeficienţi tocmai ponderile reţelei.

4.2 Invarianţi pentru reţele Petri cu salturi

În această secţiune voi prezenta unele *rezultate originale* referitoare la modul în care pot fi utilizate anumite tehnici de algebră liniară în studiul proprietăţilor reţelelor Petri cu salturi. Mai precis, voi arăta cum se pot defini S-invarianţi şi T-invarianţi pentru reţele Petri cu salturi Δ-finite, şi voi extinde rezultatele referitoare la invarianţi de la reţele P/T pentru această subclasă de reţele cu salturi.

Cele trei subsecţiuni ale acestei secţiuni tratează, pe rînd, noţiunile de matrici de incidenţă, S-invarianţi şi respectiv T-invarianţi. Stilul de prezentare al acestei secţiuni este asemănător cu cel pentru reţele P/T din secţiunea precedentă (şi lucrările [56, 48]). Iar ca o continuare a acestei secţiuni, secţiunea următoare va ilustra unele exemple de sisteme reale modelate prin reţele cu salturi şi analizate utilizând tehnica invarianţilor.

Rezultatele din această secţiune au fost publicate în lucrarea [116] prezentată la workshop-ul NATO ARW CIPC 2003 (o versiune mai amplă se găseşte în raportul tehnic [121]). Versiuni preliminare au fost prezentate la alte două conferinţe internaţionale ([113] – lucrare ce tratează doar S-invarianţii, respectiv [111] – ce tratează numai T-invarianţii, pentru subclasa reţelelor cu salturi finite). De asemenea, o sinteză a acestor rezultate a fost prezentată la şcoala de vară MOVEP 2002 desfăşurată la Nantes, Franţa ([114]).

4.2.1 Matrici de incidenţă

La fel ca şi în cazul reţelelor P/T, pentru a defini conceptul de matrice de incidenţă a unei reţele Petri cu salturi Δ-finite $\gamma = (\Sigma, R)$, unde $\Sigma = (S, T, F, W)$ este P/T-reţeaua suport a lui γ, este necesară o ordonare totală a mulţimilor S, T şi ΔR. Fără a restrânge generalitatea se va presupune că, dacă aceste mulţimi sunt de forma

$$S = \{s_1, \ldots, s_m\} \ , \ T = \{t_1, \ldots, t_n\} \ , \ \text{şi} \ \ \Delta R = \{\Delta r_1, \ldots, \Delta r_p\} \ , \tag{4.1}$$

atunci ele sunt total ordonate prin ordinea naturală pe indicii elementelor:

$$S: \ s_1 < \ldots < s_m \ , T: \ t_1 < \ldots < t_n \ , \text{şi} \ \Delta R: \ \Delta r_1 < \ldots < \Delta r_p \ . \tag{4.2}$$

Definiţia 4.2.1 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi Δ-finite. Matricea $m \times (n+p)$ -dimensională I_γ definită prin*

$$I_\gamma(i,j) = \begin{cases} I_\Sigma(i,j) & ,\forall\, 1 \le j \le n \\ I_R(i, j-n) & ,\forall\, n+1 \le j \le n+p \end{cases} ,\forall\, 1 \le i \le m \ , \tag{4.3}$$

este numită matricea de incidenţă *a reţelei γ, abreviată prin $I_\gamma = (I_\Sigma, I_R)$, unde:*

1) I_Σ *este sub-matricea* $m \times n$ *-dimensională definită prin*

$$I_\Sigma(i,j) = \Delta t_j(s_i),\ \forall\, 1 \le i \le m,\ \forall\, 1 \le j \le n\ , \tag{4.4}$$

adică este matricea de incidenţă *a P/T-reţelei suport a lui* γ*;*

2) I_R *este sub-matricea* $m \times p$ *-dimensională definită prin*

$$I_R(i,j) = \Delta r_j(s_i),\ \forall\, 1 \le i \le m,\ \forall\, 1 \le j \le p\ , \tag{4.5}$$

şi este numită matricea de incidenţă *a salturilor reţelei* γ *(unde, conform definiţiei 1.2.5,* $\Delta r_j = M'_j - M_j$*, dacă* $r_j = (M_j, M'_j)$*,* $1 \le j \le p$*).*

Conceptul de matrice de incidenţă se extinde şi la reţele cu salturi Δ-finite marcate (Σ, R, M_0) prin intermediul reţelei suport nemarcate (Σ, R).

Notaţia 4.2.1 *Dacă* I_γ *este matricea de incidenţă a reţelei* γ*, atunci se va nota prin* $I_\gamma(i,-)$ *şi* $I_\gamma(-,j)$ *linia* i *şi, respectiv, coloana* j *a acestei matrici.*

Toate matricile şi vectorii ce vor fi consideraţi în continuare vor avea drept componente numere întregi. Combinaţiile liniare vor fi de asemenea înţelese a fi cu coeficienţi întregi. Vectorul (linie sau coloană) cu toate componentele 0, indiferent de dimensiunea lui, va fi notat prin $\mathbf{0}$.

De asemenea, în cele ce urmează inegalitatea între vectori va fi înţeleasă pe componente, iar inegalitatea strictă prin inegalitate şi inegalitate strictă pe cel puţin o componentă. Mai mult, marcările reţelelor cu salturi vor fi privite drept vectori coloană m-dimensionali.

Observaţia 4.2.1 *Fie* $\gamma = (\Sigma, R)$ *o reţea cu salturi* Δ*-finite,* M *o marcare a ei şi* t_k *o tranziţie j-posibilă la* M*. Atunci marcarea j-produsă prin aplicarea tranziţiei* t_k *la* M *poate fi calculată prin:*

$$M' = M + I_\gamma \cdot f\ ,$$

unde f *este un vector coloană* $(n+p)$*-dimensional ce are* 1 *în linia* k *şi* 0 *în celelalte* n *prime linii, iar fiecare linie* l *din ultimele* p *linii conţine un număr egal cu numărul total de apariţii ale salturilor avînd variaţia* Δr_{l-n} *în j-tranziţia de la* M *la* M'*.*

Această observaţie poate fi extinsă la:

Teorema 4.2.1 *Fie* $\gamma = (\Sigma, R)$ *o reţea cu salturi* Δ*-finite şi* M_1, M_2 *două marcări ale ei. Dacă* M_2 *este j-accesibilă de la* M_1*, atunci există un vector coloană pozitiv* f *astfel încât* $M_2 = M_1 + I_\gamma \cdot f$*.*

Demonstraţie. Dacă $M_2 \in [M_1\rangle_{\gamma,j}$, adică M_2 este j-accesibilă de la M_1, atunci există o j-secvenţă de tranziţie $w \in T^*$ astfel încât $M_1\,[w\rangle_{\gamma,j}\,M_2$. Sunt posibile următoarele cazuri:

i) $w = \lambda$, adică $(M_1, M_2) \in [\lambda\rangle_{\gamma,j}$. Atunci există o secvenţă de salturi $u \in R^*$ astfel încât $M_1\,u\,M_2$. Atunci vectorul coloană $(n+p)$-dimensional f_u definit prin:

$$f_u(j) = \begin{cases} 0 & ,1 \le j \le n \\ \sum_{r\in R\,:\,\Delta r = \Delta r_{j-n}} \#(r,u) & ,n+1 \le j \le n+p \end{cases} \quad , \tag{4.6}$$

satisface $M_2 = M_1 + I_\gamma \cdot f_u$.

ii) $w = t_k$ $(1 \le k \le n)$, adică M_2 este j-accesibilă de la M_1 printr-o singură tranziţie $t_k \in T$. Atunci există două marcări M_3,M_4 şi două secvenţe de salturi $u_1, u_2 \in R^*$ astfel încât

$$M_1\,u_1\,M_3\,[t_k\rangle_\Sigma\,M_4\,u_2\,M_2 \quad .$$

Aşadar $(M_1, M_3), (M_4, M_2) \in [\lambda\rangle_{\gamma,j}$ şi conform cazului i) există doi vectori coloană pozitivi f_{u_1}, f_{u_2} astfel încât

$$M_3 = M_1 + I_\gamma \cdot f_{u_1} \;\text{ şi }\; M_2 = M_4 + I_\gamma \cdot f_{u_2} \quad .$$

Considerînd vectorul coloană $(n+p)$-dimensional g_{t_k} dat prin:

$$g_{t_k}(j) = \begin{cases} 1 & \text{, dacă } j = k \\ 0 & \text{, altfel} \end{cases} \text{, pentru orice } 1 \le j \le n+p \;, \tag{4.7}$$

este clar că $M_4 = M_3 + I_\gamma \cdot g_{t_k}$ şi, prin urmare, luînd vectorul coloană

$$f_{t_k} = f_{u_1} + g_{t_k} + f_{u_2} \quad , \tag{4.8}$$

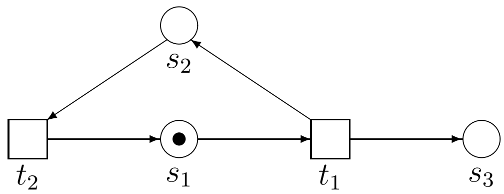
se obţine că $M_2 = M_1 + I_\gamma \cdot f_{t_k}$.

iii) $w = t_{k_1} t_{k_2} \dots t_{k_h}$, cu $|w| = h > 1$, adică marcarea M_2 este j-accesibilă de la marcarea M_1 printr-o secvenţă de mai multe tranziţii $w \in T^*$. Atunci există marcările

$$M_1 = M_{k_0}, M_{k_1}, M_{k_2} \dots, M_{k_h} = M_2$$

astfel încât

$$M_{k_{i-1}}\,[t_{k_i}\rangle_{\gamma,j}\,M_{k_i} \text{ , pentru orice } 1 \le i \le h \;\; ,$$



$$R = \{((1,0,5),(1,0,0))\}$$

Figura 4.11: Reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.1

şi deci, conform cazului ii), există vectorii coloană pozitivi $f_{t_{k_1}}, \ldots, f_{t_{k_h}}$ astfel încât

$$M_{k_i} = M_{k_{i-1}} + I_\gamma \cdot f_{t_{k_i}} \text{ , pentru orice } 1 \leq i \leq h \ . \tag{4.9}$$

Prin urmare, vectorul coloană

$$f_w = f_{t_{k_1}} + \ldots + f_{t_{k_h}} \tag{4.10}$$

satisface $M_2 = M_1 + I_\gamma \cdot f_w$.

Tratarea celor trei cazuri posibile încheie demonstraţia acestei teoreme. □

Observaţia 4.2.2 *Este clar că, fiind dată o matrice I cu coeficienţi în $\mathbb{Z}$, există o infinitate de reţele cu salturi Δ-finite ce au matricea de incidenţă I.*

Exemplul 4.2.1 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ reţeaua cu salturi Δ-finite din figura 4.11. Matricea de incidenţă a ei este*

$$I_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Secvenţa de tranziţie t_1t_2 este j-posibilă la marcarea M dată prin

$$M(s_1) = 1,\ M(s_2) = 0,\ M(s_3) = 5$$

iar marcarea nou obţinută va fi

$$M' = M + I_\gamma(-,3) + I_\gamma(-,1) + I_\gamma(-,2) = M + I_\gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dacă se face salt înainte de producerea tranziţiei t_1, respectiv

$$M'' = M + I_\gamma(-,1) + I_\gamma(-,2) = M + I_\gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},$$

în caz contrar (i.e., dacă nu se face salt deloc).

Observaţia 4.2.3 *Reciproca teoremei 4.2.1 nu este adevărată.*

Într-adevăr, reţeaua din exemplul 4.2.1 satisface ecuaţia

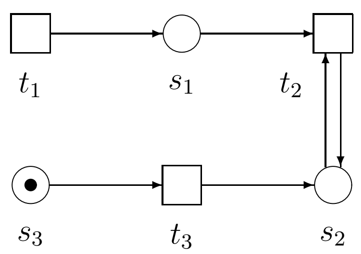
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + I_\gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{4.11}$$

dar nici o secvenţă de tranziţie nu este j-posibilă la marcarea $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

4.2.2 Invarianţi locaţie

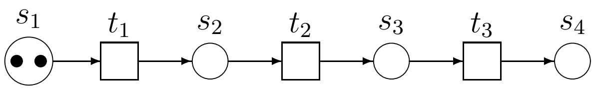
În modelarea sistemelor dinamice prin reţele Petri este foarte important de ştiut dacă numărul de puncte din reţea se conservă sau nu de-a lungul evoluţiei sistemului; pierderile "necontrolate" de puncte sunt nedorite. Evoluţia (comportarea) dinamică a reţelelor cu salturi marcate depinde de structura reţelei şi de marcarea iniţială. Ambii factori sunt cunoscuţi *a priori* şi, deci, pot fi investigaţi independent de evoluţia reţelei. Aşa cum se va vedea în continuare, influenţa majoră este dată, de fapt, de structura reţelei.

Notaţiile utilizate vor fi cele din subsecţiunea anterioară.



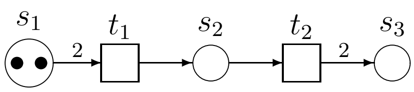
$R = \{((0,1,0),(0,0,1))\}$

Figura 4.12: Reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.2



$$R = \{((0,0,0,2),(2,0,0,0))\}$$

Figura 4.13: Reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.3



$$R = \{((2,0,0),(4,0,0))\}$$

Figura 4.14: Reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.4

Exemplul 4.2.2 *În reţeaua cu salturi marcată γ din figura 4.12, numărul total de puncte nu se conservă, numărul de puncte ce pot apare în locaţia s_1 fiind nelimitat. Însă, pe de altă parte, marcarea iniţială a reţelei γ poate fi reprodusă, cu ajutorul saltului. Acest exemplu ne arată că variaţia punctelor într-o reţea nu depinde de capacitatea de reproducere a marcărilor reţelei.*

Exemplul 4.2.3 *În reţeaua Petri cu salturi marcată γ din figura 4.13, numărul total de puncte se conservă. Marcarea iniţială a reţelei γ poate fi reprodusă dacă toate tranziţiile şi saltul apar de acelaşi număr de ori, deşi în P/T-reţeaua suport Σ marcarea iniţială nu este reproductibilă.*

Exemplul 4.2.4 *În reţeaua Petri cu salturi marcată γ din figura 4.14, numărul total de puncte nu se conservă, pe cînd în P/T-reţeaua suport Σ numărul total de puncte se conservă. În plus, nici în reţeaua γ, nici în reţeaua suport Σ, nu există marcări accesibile care să poată fi reproduse.*

La fel ca şi în cazul reţelelor P/T marcate, pentru reţelele cu salturi Δ-finite marcate întrebarea care se poate pune, ca urmare a exemplelor anterioare, este următoarea: cum se poate calcula un vector coloană de ponderi al locaţiilor (atunci când el există)?

Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea Petri cu salturi Δ-finite marcată. Pentru a răspunde la această întrebare, să observăm că vectorul de ponderi g, pe care dorim să-l calculăm, trebuie să satisfacă relaţia:

$$g^t \cdot M = g^t \cdot M' \ , \tag{4.12}$$

pentru orice $M, M' \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$.

Pentru două marcări arbitrare $M, M' \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$, conform teoremei 4.2.1, există doi vectori coloană f, f' astfel încât $M = M_0 + I_\gamma \cdot f$ şi $M' = M_0 + I_\gamma \cdot f'$. Relaţia (4.12) conduce la

$$g^t \cdot I_\gamma \cdot (f - f') = 0 \ ,$$

care poate fi îndeplinită doar dacă $g^t \cdot I_\gamma = \mathbf{0}$ (vectorii f şi f' fiind arbitrari). Deci, vectorul de ponderi verifică ecuaţia:

$$X^t \cdot I_\gamma = \mathbf{0} \ . \tag{4.13}$$

Definiţia 4.2.2 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi Δ-finite, reţeaua P/T suport a ei fiind $\Sigma = (S, T, F, W)$.*

(1) Se numeşte invariant locaţie*, sau* S-invariant*, al reţelei γ orice vector coloană m-dimensional J de numere întregi ce verifică relaţia*

$$J^t \cdot I_\gamma = \mathbf{0} \ , \tag{4.14}$$

unde $I_\gamma = (I_\Sigma, I_R)$ este matricea de adiacenţă a reţelei γ.
Observaţie: $J^t \cdot I_\gamma = \mathbf{0}$ este echivalentă cu $J^t \cdot I_\Sigma = \mathbf{0}$ şi $J^t \cdot I_R = \mathbf{0}$.

(2) Dacă J este S-invariant al reţelei γ, atunci mulţimea

$$P_J = \{s_i \in S \mid J(i) \neq 0\}$$

este numită suportul *S-invariantului J.*

(3) S-invariantul J este numit pozitiv *dacă $J > \mathbf{0}$ (i.e. $J \geq \mathbf{0}$ şi $J \neq \mathbf{0}$).*

(4) Un S-invariant pozitiv $J > \mathbf{0}$ este numit minimal *dacă nu există un alt S-invariant J' astfel încât $\mathbf{0} < J' < J$.*

(5) Reţeaua cu salturi Δ-finite indusă de S-invariantul J este definită prin

$$\gamma\,|_J = (\Sigma', R'), \ \ \text{cu } \Sigma' = (S', T', F', W')\,,$$

unde:

(i) $S' = P_J$;
(ii) $T' = {}^\bullet S' \cup S'^\bullet$;
(iii) $F' = F \cap ((S' \times T') \cup (T' \times S'))$;
(iv) $W' = W|_{(S' \times T') \cup (T' \times S')}$;
(v) $R' = \{ \ (M_1|_{S'}, M_2|_{S'}) \mid (M_1, M_2) \in R \ \}$.

Este clar că orice reţea cu salturi Δ-finite are cel puţin un S-invariant, $J = \mathbf{0}$, dar este natural să fim interesaţi de S-invarianţi nenuli. De aceea, se spune că o reţea *are S-invarianţi* dacă are cel puţin un S-invariant nenul.

Orice combinaţie liniară de S-invarianţi este S-invariant:

Lema 4.2.1 *Dacă J_1 şi J_2 sunt S-invarianţi ai unei reţele Petri cu salturi Δ-finite $\gamma = (\Sigma, R)$, iar $z \in \mathbb{Z}$, atunci $J_1 + J_2$ şi $z \cdot J_1$ sunt de asemenea S-invarianţi ai reţelei γ.*

Demonstraţie. Rezultă uşor direct de la definiţia S-invarianţilor. □

Exemplul 4.2.5 *Reţeaua cu salturi din figura 4.11 are S-invariantul minimal*

$$J = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

orice alt S-invariant al ei fiind o combinaţie liniară de forma $z \cdot J$, cu $z \in \mathbb{Z}$.

Reţeaua cu salturi din figura 4.12 are S-invariantul minimal

$$J' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

orice alt S-invariant al ei fiind o combinaţie liniară de forma $z \cdot J'$, cu $z \in \mathbb{Z}$.

Reţeaua indusă de S-invariantul J' este reprezentată grafic în figura 4.15.

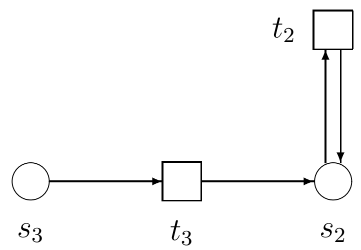
Reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.3 are un singur S-invariant minimal, acelaşi ca şi P/T-reţeaua ei suport, şi anume

$$J'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

iar reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.4 nu are S-invarianţi, deşi reţeaua sa suport are S-invarianţi (a se vedea exemplul 4.1.5 referitor la reţeaua P/T din figura 4.4(a)).

Între S-invarianţii unei reţele cu salturi Δ-finite şi cei ai P/T-reţelei suport a ei există următoarea legătură:

Propoziţia 4.2.1 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea cu salturi Δ-finite. Dacă vectorul J este un S-invariant al reţelei γ, atunci J este şi S-invariant al reţelei Σ.*



$$R = \{((1,0),(0,1))\}$$

Figura 4.15: Reţeaua indusă din exemplul 4.2.5

Demonstraţie. Rezultă imediat direct de la definiţiile S-invarianţilor pentru reţele P/T şi pentru reţele cu salturi Δ-finite. $\square$

Ca o consecinţă a propoziţiei 4.2.1, se observă că pentru orice reţea cu salturi Δ-finite $\gamma = (\Sigma, R)$ au loc afirmaţiile:

i) dacă γ are S-invarianţi, atunci şi Σ are S-invarianţi;

ii) dacă Σ nu are S-invarianţi, atunci nici γ nu are S-invarianţi.

Observaţia 4.2.4 *Reciproca propoziţiei 4.2.1 nu este adevărată, deoarece există o reţea cu salturi Δ-finite $\gamma = (\Sigma, R)$ astfel încât γ nu are S-invarianţi şi Σ are S-invarianţi (a se vedea reţeaua din exemplul 4.2.4).*

Teorema 4.2.2 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea cu salturi Δ-finite marcată. Dacă J este un S-invariant nenul, atunci are loc egalitatea:*

$$J^t \cdot M = J^t \cdot M_0 \ , \qquad (4.15)$$

pentru orice $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$.

Demonstraţie. Fie $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ o marcare arbitrară. Atunci, conform teoremei 4.2.1, există un vector coloană pozitiv f astfel încât $M = M_0 + I_\gamma \cdot f$. Înmulţind această egalitate la stânga cu J^t şi folosind faptul că $J^t \cdot I_\gamma = \mathbf{0}$, se obţine $J^t \cdot M = J^t \cdot M_0$. $\square$

Această teoremă ne spune, printre altele, că dacă J este un S-invariant al unei reţele cu salturi Δ-finite marcate $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ şi reţeaua indusă de J este chiar (Σ, R), atunci punctele din γ se conservă, în sensul:

$$J^t \cdot M = J^t \cdot M_0 = \text{constant} \ ,$$

pentru orice marcare j-accesibilă $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$.

Mai mult, se poate spune că orice S-invariant al unei reţele cu salturi Δ-finite marcate γ furnizează ponderile locaţiilor unei subreţele a reţelei γ în care punctele se conservă (prin intermediul acelor ponderi).

Întrebarea naturală care se pune acum este în legătură cu reciproca teoremei 4.2.2. Sub incidenţa unei condiţii suplimentare vom arăta că ea este îndeplinită.

Teorema 4.2.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea Petri cu salturi Δ-finite marcată pseudo-viabilă şi R-redusă. Dacă J este un vector nenul de numere întregi ce verifică*

$$J^t \cdot M = J^t \cdot M_0$$

pentru orice $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$, atunci J este S-invariant al reţelei γ.

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că

$$J^t \cdot I_\gamma = \mathbf{0}\,.$$

i) Să arătăm mai întîi că $J^t \cdot I_\Sigma = \mathbf{0}$, sau, echivalent,

$$J^t \cdot I_\Sigma(-, j) = 0\,,\ \forall\, 1 \leq j \leq n.$$

Fie $t_k \in T$, cu $1 \leq k \leq n$. Reţeaua γ fiind pseudo-viabilă, tranziţia t_k este pseudo-viabilă şi deci există $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$, astfel încât $M[t_k\rangle_{\gamma,j}$. Prin urmare, există o marcare M_1 astfel încât $M\, R^*\, M_1\, [t_k\rangle_\Sigma$. Fie $M_1\, [t_k\rangle_\Sigma\, M_2$. Marcarea M_2 poate fi calculată, folosind matricea de incidenţă, prin

$$M_2 = M_1 + I_\Sigma \cdot f_k = M_1 + I_\Sigma(-, k),$$

unde f_k este vectorul coloană n-dimensional ce are 1 pe linia k şi 0 în rest. Este clar că $M_1, M_2 \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$. Prin înmulţire la stânga cu J^t şi utilizarea ipotezei teoremei asupra vectorului J, obţinem $J^t \cdot I_\Sigma(-, k) = 0$.

ii) Să arătăm acum că $J^t \cdot I_R = \mathbf{0}$, sau, echivalent,

$$J^t \cdot I_R(-, j) = 0\,,\ \forall\, 1 \leq j \leq p.$$

Fie $\Delta r_k \in \Delta R$, cu $1 \leq k \leq p$ (prin urmare există un salt $r_k \in R$ astfel încât $\Delta(r_k) = \Delta r_k$). Reţeaua γ fiind R-redusă, rezultă că pentru saltul $r_k = (M', M'')$ avem $M' \neq M''$ şi $M' \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$. Marcarea M'' poate fi calculată, folosind matricea de incidenţă, prin

$$M'' = M' + I_R \cdot f_k = M' + I_R(-, k),$$

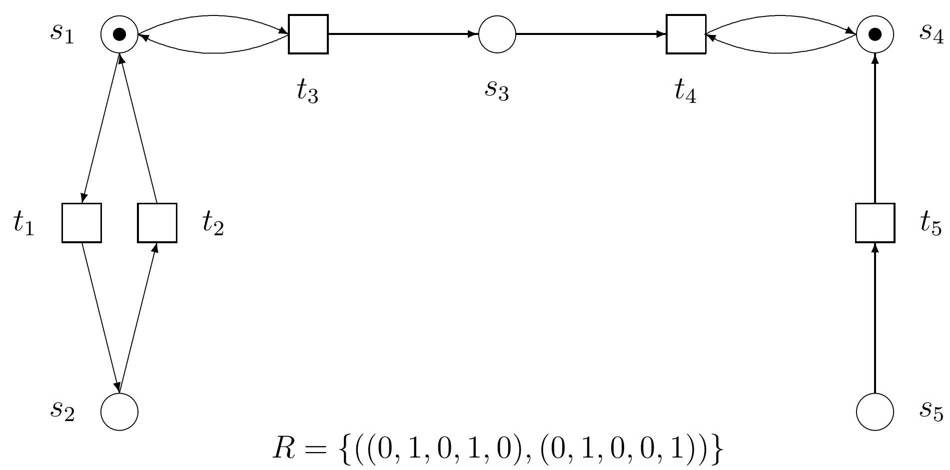


Figura 4.16: Reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.6

unde f_k este vectorul coloană p-dimensional ce are 1 pe linia k şi 0 în rest. Este clar că $M', M'' \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$. Prin înmulţire la stânga cu J^t şi utilizarea ipotezei teoremei asupra vectorului J, obţinem $J^t \cdot I_R(-,k) = 0$.

Din i) şi ii) deducem că $J^t \cdot I_\gamma = \mathbf{0}$, ceea ce demonstrează teorema. $\square$

Exemplul 4.2.6 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ reţeaua Petri cu salturi finite marcată din figura 4.16, ce reprezintă un model simplificat al reţelei din articolul [118] (în care am prezentat un model al unui sistem de tip producător–consumator cu buffer nelimitat).*

Această reţea are doi S-invarianţi minimali, şi anume vectorii:

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

orice alt S-invariant al ei fiind o combinaţie liniară a vectorilor J_1 şi J_2.

Folosind S-invariantul J_1, din teorema 4.2.2 obţinem

$$M(s_1) + M(s_2) = 1\,, \text{ pentru orice } M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}\ ,$$

ceea ce ne spune că în subreţeaua indusă de J_1 (corespunzătoare producătorului), numărul total de puncte se conservă, mai precis că producătorul este întotdeauna în starea s_1 sau s_2.

Similar, folosind S-invariantul J_2, obţinem

$$M(s_4) + M(s_5) = 1\,, \textit{ pentru orice } M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}\ ,$$

ceea ce ne spune că în subreţeaua indusă de J_2 (corespunzătoare consumatorului), numărul total de puncte se conservă, mai precis consumatorul este întotdeauna în starea s_4 sau s_5.

Prin analogie cu noţiunea de locaţie izolată (i.e. o locaţie asupra căreia tranziţiile nu au nici un efect), vom introduce noţiunea de locaţie R-izolată ca fiind o locaţie asupra căreia salturile nu au nici un efect.

Definiţia 4.2.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi. O locaţie $s \in S$ se numeşte R*-izolată *dacă pentru orice salt $r \in R$ avem $\Delta r(s) = 0$.*

Teorema 4.2.4 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea cu salturi Δ-finite marcată, astfel încât γ este pseudo-viabilă şi fără locaţii izolate, sau este R-redusă şi fără locaţii R-izolate. Dacă $J > \mathbf{0}$ este un S-invariant al ei, atunci*

$$J^t \cdot M > 0\,,$$

pentru orice $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$.

Demonstraţie. Pe baza teoremei 4.2.2 deducem că este suficient de arătat că există $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ astfel încât $J^t \cdot M > 0$.

Fie s_i o locaţie astfel încât $J(i) > 0$ (există o astfel de locaţie deoarece $J > \mathbf{0}$). Pe baza ipotezei, putem deosebi două situaţii posibile:
i) Reţeaua γ este pseudo-viabilă şi fără locaţii izolate. Locaţia s_i nefiind izolată, există o tranziţie t astfel încât $s_i \in {}^\bullet t \cup t^\bullet$. Pseudo-viabilitatea tranziţiei t conduce la existenţa unei marcări $M' \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ astfel încât $M'[t\rangle_{\gamma,j}$. Prin urmare, există o marcare M_1 astfel încât $M'\,R^*\,M_1\,[t\rangle_\Sigma$. Sunt posibile următoarele două cazuri:

1. $s_i \in {}^\bullet t$. Prin urmare, $t^-(s_i) > 0$. Faptul că $M_1[t\rangle_\Sigma$ conduce la $M_1(s_i) \geq t^-(s_i)$, de unde $M_1(s_i) > 0$ şi, deci, alegem $M = M_1$;
2. $s_i \in t^\bullet$. Prin urmare, $t^+(s_i) > 0$. Deoarece $M_1\,[t\rangle_\Sigma$, fie M_2 marcarea produsă, i.e. $M_1\,[t\rangle_\Sigma\,M_2$. Atunci urmează că $M_1(s_i) \geq t^-(s_i)$ şi $M_2(s_i) = (M_1(s_i) - t^-(s_i)) + t^+(s_i)$. Este clar că $M_2(s_i) > 0$ şi, deci, putem alege $M = M_2$.

ii) Reţeaua γ este R-redusă şi fără locaţii R-izolate. Locaţia s_i nefiind R-izolată, există un salt $r = (M', M'') \in R$ astfel încât $\Delta r(s_i) \neq 0$, şi deci $M'(s_i) \neq M''(s_i)$. Faptul că reţeaua este R-redusă conduce la $M' \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$. Prin urmare şi $M'' \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$. Sunt posibile următoarele două cazuri:

1. $M'(s_i) > M''(s_i)$. Prin urmare, $M'(s_i) > 0$ şi, deci, alegem $M = M'$;
2. $M'(s_i) < M''(s_i)$. Prin urmare, $M''(s_i) > 0$ şi, deci, alegem $M = M''$.

Aşadar am arătat că, în ambele situaţii i) şi ii), există $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ astfel încât $M(s_i) > 0$. Atunci, deoarece J este S-invariant pozitiv, rezultă că

$$J^t \cdot M = \sum_{h=1}^{m} J(h)M(s_h) > 0$$

şi teorema este astfel demonstrată. □

Definiţia 4.2.4 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi Δ-finite. Spunem că γ este* acoperită cu S-invarianţi *dacă pentru fiecare locaţie $s \in S$ există un S-invariant pozitiv J_s cu $s \in P_{J_s}$.*

Exemplul 4.2.7 *Reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.3 este acoperită cu S-invarianţi, iar reţelele cu salturi din figurile 4.11 şi 4.12, precum şi cele din exemplele 4.2.4 şi 4.2.6 nu sunt acoperite cu S-invarianţi (justificare: a se vedea exemplul 4.2.5).*

Lema 4.2.2 *Dacă $\gamma = (\Sigma, R)$ este o reţea Petri cu salturi Δ-finite acoperită cu S-invarianţi, atunci există un S-invariant pozitiv J cu $P_J = S$.*

Demonstraţie. Prin ipoteză, pentru fiecare locaţie $s \in S$ a reţelei γ există un S-invariant pozitiv J_s cu $s \in P_{J_s}$. Folosind lema 4.2.1, $J = \sum_{s \in S} J_s$ este un S-invariant pozitiv cu $P_J = S$. □

Următorul rezultat ne arată cum poate fi studiată cu ajutorul invarianţilor proprietatea de mărginire.

Teorema 4.2.5 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea cu salturi Δ-finite marcată.*

(1) Dacă $J > \mathbf{0}$ este un S-invariant al reţelei γ, atunci orice locaţie $s \in P_J$ este mărginită.

(2) Dacă γ este acoperită cu S-invarianţi, atunci γ este mărginită.

Demonstraţie. (1) Fie $J^t \cdot M_0 = k \in \mathbb{N}$. Conform teoremei 4.2.2, pentru orice $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ avem $J^t \cdot M = k$.

Fie $s_i \in P_J$ şi $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ o marcare j-accesibilă arbitrară. Atunci

$$J^t \cdot M = J(i)M(s_i) + \sum_{h \neq i} J(h)M(s_h) = k$$

şi, deci, $M(s_i) \le k$, ceea ce ne arată că s_i este mărginită ($J(i) \ne 0$ deoarece $s_i \in P_J$).

(2) Conform lemei 4.2.2, rezultă că există un S-invariant $J > \mathbf{0}$ cu $P_J = S$. Aplicând (1), deducem că toate locaţiile din S sunt mărginite, deci reţeaua γ este mărginită. $\square$

Exemplul 4.2.8 *Reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.3 este mărginită. Iar reţeaua din exemplul 4.2.6 este nemărginită (mai precis, locaţiile s_1, s_2, s_4 şi s_5 sunt mărginite, în schimb locaţia s_3 este nemărginită).*

4.2.3 Invarianţi tranziţie

La fel ca şi în cazul reţelelor P/T, un alt aspect important în analiza reţelelor cu salturi, pe lângă conservarea punctelor în reţea, îl constituie reproductibilitatea marcărilor.

Notaţiile utilizate vor fi cele din subsecţiunea 4.2.1.

Definiţia 4.2.5 *O marcare M a unei reţele Petri cu salturi $\gamma = (\Sigma, R)$ este numită* reproductibilă *dacă există o secvenţă de j-tranziţie $w \in T^*$ astfel încât $M\,[w\rangle_{\gamma,j}\,M$ şi, în plus, $w \ne \lambda$ sau $(M, M) \in R^+$ (R^+ fiind închiderea tranzitivă a relaţiei R).*

Să observăm că, dacă M este o marcare reproductibilă a unei reţele Petri cu salturi γ, atunci nu rezultă că orice marcare $M' \ge M$ a reţelei γ este reproductibilă, deci rezultatul similar de la reţele P/T nu se păstrează şi în cazul reţelelor cu salturi. Justificarea acestei observaţii decurge din faptul că în cazul reţelelor cu salturi nu se păstrează proprietatea de *monotonie a producerii unei tranziţii*, şi anume:

$$M_1\,[t\rangle_{\gamma,j}\,M_2 \;\wedge\; M_1' \ge M_1 \;\not\Rightarrow\; M_1'\,[t\rangle_{\gamma,j}\,M_2'\,,\ \text{cu } M_2' = M_1' + M_2 - M_1\,,$$

monotonie valabilă în cazul reţelelor P/T.

Să mai observăm că, dacă M este reproductibilă, atunci $M\,[w\rangle_{\gamma,j}\,M$ şi conform teoremei 4.2.1 există un vector pozitiv f astfel încât $M + I_\gamma \cdot f = M$, adică $I_\gamma \cdot f = \mathbf{0}$.

Definiţia 4.2.6 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea cu salturi Δ-finite, $\Sigma = (S, T, F, W)$ fiind reţeaua P/T suport a ei.*

(1) Se numeşte invariant tranziţie*, sau* T-invariant*, al reţelei γ orice vector coloană $(n+p)$-dimensional J de numere întregi ce verifică relaţia*

$$I_\gamma \cdot J = \mathbf{0}\,, \tag{4.16}$$

unde $I_\gamma = (I_\Sigma, I_R)$ *este matricea de adiacenţă a reţelei* γ.
Observaţie: $I_\gamma \cdot J = \mathbf{0}$ este echivalentă cu $I_\Sigma \cdot J_\Sigma + I_R \cdot J_R = \mathbf{0}$, unde J_Σ este vectorul n-dimensional definit prin $J_\Sigma(i) = J(i), 1 \le i \le n$, iar J_R este vectorul p-dimensional definit prin $J_R(i) = J(n+i), 1 \le i \le p$, şi vom abrevia aceasta prin $J = (J_\Sigma, J_R)$.

(2) *Dacă* J *este T-invariant al reţelei* γ*, atunci mulţimea*

$$P_J = \{t_i \in T \mid J(i) \neq 0\} \cup \{r \in R \mid \exists\, 1 \le i \le p : \Delta r = \Delta r_i \wedge J(n+i) \neq 0\}$$

este numită suportul *T-invariantului* J.

(3) *T-invariantul* J *este numit* pozitiv *dacă* $J > \mathbf{0}$ *(i.e.* $J \geq \mathbf{0}$ *şi* $J \neq \mathbf{0}$*).*

(4) *Un T-invariant pozitiv* $J > \mathbf{0}$ *este numit* minimal *dacă nu există un alt T-invariant* J' *astfel încât* $\mathbf{0} < J' < J$.

(5) *Reţeaua cu salturi* Δ*-finite indusă de T-invariantul* J *este definită prin*

$$\gamma\,|_J = (\Sigma', R'), \ \ cu\ \Sigma' = (S', T', F', W')\,,$$

unde:

(i) $T' = P_J \cap T$;

(ii) $S' = {}^\bullet T' \cup T'^\bullet$;

(iii) $F' = F \cap ((S' \times T') \cup (T' \times S'))$;

(iv) $W' = W|_{(S' \times T') \cup (T' \times S')}$;

(v) $R' = P_J \cap R$.

Observaţia 4.2.5 *Deoarece atît tranziţiile, cît şi salturile sunt implicate în definiţia noţiunii de T-invariant, o denumire mai firească a acestei noţiuni ar fi fost aceea de T+R-invariant (sau TR-invariant), dar am preferat să păstrez denumirea din cazul clasic al reţelelor P/T (din motive de uniformitate a denumirilor).*

În mod evident, orice reţea cu salturi Δ-finite are cel puţin un T-invariant, $J = \mathbf{0}$, dar este natural să fim interesaţi de T-invarianţi nenuli. De aceea, vom spune că o reţea *are T-invarianţi* dacă are cel puţin un T-invariant nenul.

Este uşor de observat că orice combinaţie liniară de T-invarianţi este T-invariant:

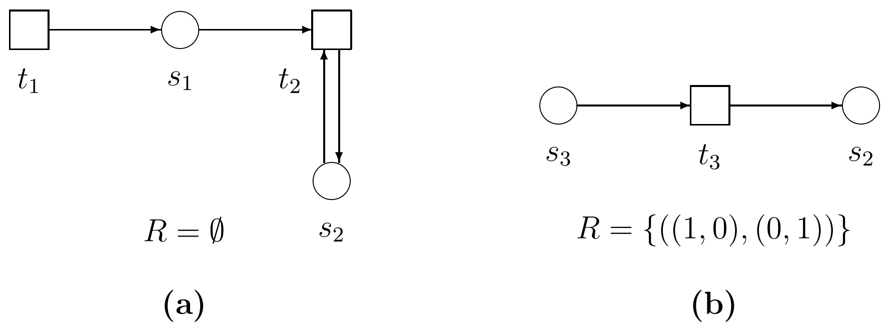


Figura 4.17: Reţelele induse din exemplul 4.2.9

Lema 4.2.3 *Dacă J_1 şi J_2 sunt T-invarianţi ai unei reţele Petri cu salturi Δ-finite $\gamma = (\Sigma, R)$, iar $z \in \mathbb{Z}$, atunci $J_1 + J_2$ şi $z \cdot J_1$ sunt de asemenea T-invarianţi ai reţelei γ.*

Demonstraţie. Rezultă uşor direct de la definiţia T-invarianţilor. □

Exemplul 4.2.9 *Reţeaua cu salturi din figura 4.11 are T-invariantul minimal*

$$J = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix},$$

orice alt T-invariant al ei fiind o combinaţie liniară de forma $z \cdot J$, cu $z \in \mathbb{Z}$.

Reţeaua cu salturi din figura 4.12 are doi T-invarianţi minimali

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; J_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

orice alt T-invariant al ei fiind o combinaţie liniară de forma $z_1 \cdot J_1 + z_2 \cdot J_2$, cu $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$.

Reţelele cu salturi Δ-finite induse de T-invarianţii J_1 şi J_2 sunt reprezentate grafic în figurile 4.17(a) şi, respectiv, 4.17(b).

Reţeaua cu salturi Δ-finite din exemplul 4.2.3 are T-invariantul minimal

$$J' = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

deşi P/T-reţeaua ei suport nu are T-invarianţi. Iar reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.4 nu are T-invarianţi, la fel ca şi P/T-reţeaua sa suport.

Iar reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.6 are trei T-invarianţi minimali

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ J_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ J_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

orice alt T-invariant al acestei reţele fiind o combinaţie liniară de forma $z_1 \cdot J_1 + z_2 \cdot J_2 + z_3 \cdot J_3$*, cu* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{Z}$*.*

Din păcate, între T-invarianţii unei reţele cu salturi Δ-finite şi cei ai reţelei P/T suport a ei nu există nici o legătură, deci pentru T-invarianţi nu avem un rezultat analog propoziţiei 4.2.1 de la S-invarianţi.

Este clar că dacă o reţea are marcări reproductibile, atunci ea are şi T-invarianţi.

Teorema 4.2.6 *Fie* $\gamma = (\Sigma, R)$ *o reţea Petri cu salturi* Δ*-finite. Dacă* γ *are marcări reproductibile, atunci* γ *are T-invarianţi pozitivi.*

Demonstraţie. Fie M o marcare reproductibilă a lui γ. Deci $M\,[w\rangle_{\gamma,j}\,M$, şi conform teoremei 4.2.1 există un vector pozitiv f astfel încât $M = M + I_\gamma \cdot f$. Prin urmare $I_\gamma \cdot f = 0$, deci f este un T-invariant pozitiv al reţelei γ. □

Reciproca acestei teoreme nu este, din păcate, adevărată, deşi ea este adevărată în cazul reţelelor P/T. Justificarea acestei observaţii decurge din faptul că, după cum am mai spus, în cazul reţelelor cu salturi nu se păstrează proprietatea de monotonie a producerii unei tranziţii, şi anume:

$$M_1\,[t\rangle_{\gamma,j}\,M_2 \ \wedge \ M_1' \geq M_1 \ \not\Rightarrow \ M_1'\,[t\rangle_{\gamma,j}\,M_2'\,, \text{ cu } M_2' = M_1' + M_2 - M_1\,,$$

monotonie valabilă în cazul reţelelor P/T. Iată şi un exemplu în acest sens:

Exemplul 4.2.10 *Fie reţelele cu salturi finite* $\gamma_1 = (\Sigma_1, R_1)$ *şi* $\gamma_2 = (\Sigma_2, R_2)$ *din figurile 4.18(a) şi respectiv 4.18(b). Se verifică uşor faptul că vectorii*

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \textit{respectiv } J_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

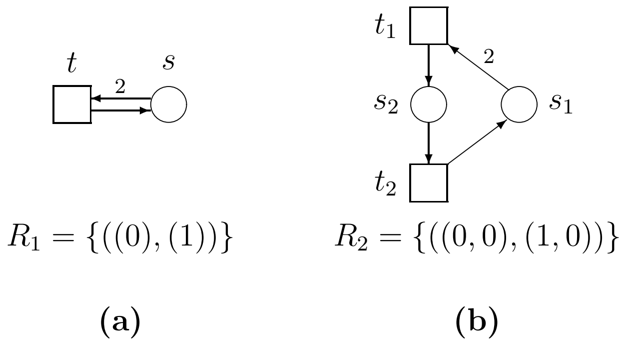


Figura 4.18: Reţelele cu salturi din exemplul 4.2.10

sunt singurii T-invarianţi minimali ai reţelelor γ_1 *şi respectiv* γ_2*. Însă, pe de altă parte, se poate constata cu uşurinţă că nici una dintre reţelele* γ_1 *şi* γ_2 *nu are marcări reproductibile.*

Justificare: presupunînd că γ_1 *ar avea o marcare reproductibilă* M*, înseamnă că ar exista o secvenţă de j-tranziţie* $w \in T^*$ *astfel încât* $M\,[w\rangle_{\gamma,j}\, M$ *şi, în plus,* $w \neq \lambda$ *sau* $(M,M) \in R^+$*. Se disting două cazuri posibile:*
a) secvenţa w *începe cu saltul reţelei,* $r = ((0),(1))$*. Prin urmare,* $M = (0)$ *şi în urma saltului se obţine marcarea* $M' = (1)$*, la care nu se poate aplica nici tranziţia* t*, nici saltul* r*. Deci în acest caz* M *nu este reprodusă.*
b) secvenţa w *începe cu tranziţia* t*. Fie* $k = M(s) \in \mathbb{N}$ *valoarea marcării* M*. Prin urmare* $k \geq 2$ *(pentru ca* t *să fie posibilă la* M*), deci saltul* r *nu este posibil la* M*, şi fie* $M\,[t\rangle_{\Sigma_1} M_1$*, cu* $M_1(s) = k-1$*. În continuare se poate aplica în mod repetat doar tranziţia* t *pînă cînd locaţia* s *rămîne cu un singur punct, i.e. avem secvenţa de tranziţie*

$$M\,[t\rangle_{\Sigma_1} M_1\,[t\rangle_{\Sigma_1} M_2 \ldots M_{k-2}\,[t\rangle_{\Sigma_1} M_{k-1}\,,$$

unde $M_i(s) = k - i$*, pentru orice* $1 \leq i \leq k-1$*. Iar la marcarea* $M_{k-1} = (1)$ *nu se mai poate aplica nici tranziţia* t*, nici saltul* r*. Deci nici în acest caz* M *nu este reprodusă.*

Pentru reţeaua γ_2 *se arată printr-un raţionament similar că nu are marcări reproductibile.*

Să mai observăm că, în cazul particular cînd reţeaua cu salturi Δ-finite $\gamma = (\Sigma, R)$ are un T-invariant pozitiv $J = (J_\Sigma, J_R) > \mathbf{0}$ (ceea ce înseamnă că $I_\Sigma \cdot J_\Sigma + I_R \cdot J_R = \mathbf{0}$), astfel încât J satisface în plus condiţia restrictivă $I_\Sigma \cdot J_\Sigma = I_R \cdot J_R = \mathbf{0}$, atunci γ are marcări reproductibile. Într-adevăr, din $I_\Sigma \cdot J_\Sigma = \mathbf{0}$, deducem că Σ are marcări reproductibile, adică există o marcare

M şi o secvenţă de tranziţie $w \in T^*$ astfel încât $M\,[w\rangle_\Sigma\, M$; prin urmare şi $M\,[w\rangle_{\gamma,j}\, M$ (fără nici un salt), deci γ are marcări reproductibile.

Definiţia 4.2.7 *Un T-invariant J al unei mΔFJPTN $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ se numeşte* realizabil *dacă există o marcare j-accesibilă $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ şi o secvenţă de j-tranziţie $M\,[w\rangle_{\gamma,j}\, M'$, cu $w \in T^*$, astfel încât $J(i) = \#(t_i, w)$, pentru orice $1 \le i \le n$, şi în plus, pentru orice $n+1 \le i \le n+p$, $J(i)$ este egal cu numărul total de apariţii ("ascunse") ale tuturor salturilor $r \in R$ cu $\Delta r = \Delta r_{i-n}$ în secvenţa de j-tranziţie $M\,[w\rangle_{\gamma,j}\, M'$.*

Cu alte cuvinte, T-invariantul J se numeşte *realizabil* dacă există o marcare j-accesibilă $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ şi o secvenţă de j-tranziţie

$$M u_1' M_1' \,[t_{k_1}\rangle_\Sigma\, M_1'' u_1'' M_1 u_2' M_2' \,[t_{k_2}\rangle_\Sigma\, M_2'' u_2'' M_2 \ldots M_{h-1} u_h' M_h' \,[t_{k_h}\rangle_\Sigma\, M_h'' u_h'' M_h\,,$$

cu $h \ge 0$, $t_{k_1}, \ldots, t_{k_h} \in T$, şi $u_1', u_1'', \ldots, u_h', u_h'' \in R^*$, astfel încât

$$J(i) = \begin{cases} \#(t_i, t_{k_1} \cdots t_{k_h}) & \text{, dacă } 1 \le i \le n \\ \displaystyle\sum_{r \in R\,:\,\Delta r = \Delta r_{i-n}} \#(r, u_1' u_1'' \cdots u_h' u_h'') & \text{, dacă } n+1 \le i \le n+p \end{cases} \tag{4.17}$$

Observaţie: $h = 0$ dacă şi numai dacă $P_J \cap T = \emptyset$, şi în acest caz secvenţa de j-tranziţie este de forma $M\,u\,M'$, cu $u \in R^+$, iar condiţia ce trebuie să fie îndeplinită este

$$J(i) = \begin{cases} 0 & \text{, dacă } 1 \le i \le n \\ \displaystyle\sum_{r \in R\,:\,\Delta r = \Delta r_{i-n}} \#(r, u) & \text{, dacă } n+1 \le i \le n+p \end{cases} \tag{4.18}$$

Observaţia 4.2.6 *Nu orice T-invariant pozitiv J al unei reţele cu salturi Δ-finite γ este realizabil.*

Această observaţie are loc chiar şi dacă reţeaua este viabilă şi mărginită şi fiecare marcare a lui γ este reproductibilă şi J este minimal. Concludent în acest sens este chiar exemplul 4.1.8, care a fost dat pentru aceeaşi observaţie la reţele P/T în subsecţiunea 4.1.3, ţinînd cont de faptul că o reţea P/T poate fi privită drept o reţea cu salturi Δ-finite cu $R = \emptyset$ (adică, cu mulţimea de salturi vidă).

Următoarea reciprocă a teoremei 4.2.6 are loc sub incidenţa unei condiţii suplimentare:

Teorema 4.2.7 *Fie γ o reţea Petri cu salturi Δ-finite marcată. Dacă γ are T-invarianţi realizabili, atunci γ are marcări reproductibile.*

Demonstraţie. Fie γ o $m\Delta FJPTN$ şi J un T-invariant realizabil al reţelei γ. Prin urmare, există o marcare j-accesibilă $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ şi o secvenţă de j-tranziţie $M\,[w\rangle_{\gamma,j}\,M'$, cu $w \in T^*$, astfel încât $J(i) = \#(t_i, w)$, pentru orice $1 \le i \le n$, şi în plus, pentru orice $n+1 \le i \le n+p$, $J(i)$ este egal cu numărul total de apariţii ("ascunse") ale tuturor salturilor $r \in R$ cu $\Delta r = \Delta r_{i-n}$ în secvenţa de j-tranziţie $M\,[w\rangle_{\gamma,j}\,M'$. Folosind acest fapt, se observă cu uşurinţă că marcarea M' poate fi calculată pe baza marcării M prin formula (a se vedea teorema 4.2.1):

$$M' = M + I_\gamma \cdot J\,.$$

Dar $I_\gamma \cdot J = 0$ întrucît J este un T-invariant al reţelei γ. Rezultă că $M' = M$ şi, prin urmare, M este o marcare reproductibilă a reţelei γ. □

În încheierea acestei subsecţiuni, voi arăta că rezultatul de la reţele P/T care spunea că "reţelele marcate viabile şi mărginite sunt acoperite cu T-invarianţi" (vezi teorema 4.1.7), rămîne adevărat şi în cazul reţelelor cu salturi Δ-finite, ce sunt mărginite şi viabile (atît din punct de vedere al tranziţiilor, cît şi al salturilor).

Definiţia 4.2.8 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi Δ-finite. Spunem că γ este* acoperită cu T-invarianţi *dacă pentru fiecare tranziţie $t \in T$ există un T-invariant pozitiv J_t cu $t \in P_{J_t}$, şi pentru fiecare salt $r \in R$ există un T-invariant pozitiv J_r cu $r \in P_{J_r}$.*

Exemplul 4.2.11 *Reţeaua cu salturi din exemplul 4.2.4 nu este acoperită cu T-invarianţi, iar reţelele cu salturi din figurile 4.11 şi 4.12, precum şi cele din exemplele 4.2.3 şi 4.2.6 sunt acoperite cu T-invarianţi (justificare: a se vedea exemplul 4.2.9).*

Lema 4.2.4 *Dacă $\gamma = (\Sigma, R)$ este o reţea Petri cu salturi Δ-finite acoperită cu T-invarianţi, atunci există un T-invariant pozitiv J cu $P_J = T \cup R$.*

Demonstraţie. Prin ipoteză, pentru fiecare tranziţie $t \in T$ există un T-invariant pozitiv J_t cu $t \in P_{J_t}$, şi pentru fiecare salt $r \in R$ există un T-invariant pozitiv J_r cu $r \in P_{J_r}$. În particular, deoarece reţeaua γ are salturi Δ-finite, mulţimea variaţiilor salturilor ΔR fiind de forma (4.1), pentru orice variaţie Δr_i, cu $1 \le i \le p$, putem alege un salt $r'_i \in R$ astfel încât $\Delta(r'_i) = \Delta r_i$ (evident, există măcar cîte un astfel de salt pentru fiecare variaţie), şi prin urmare pentru acest salt r'_i există un T-invariant pozitiv $J_{r'_i}$ cu $r'_i \in P_{J_{r'_i}}$. Atunci, folosind lema 4.2.3,

$$J = \sum_{t \in T} J_t + \sum_{1 \le i \le p} J_{r'_i}$$

este un T-invariant pozitiv cu $P_J = T \cup R$. □

Pentru reţele Petri cu salturi, se poate introduce noţiunea de *viabilitate a unui salt*, similar cu noţiunea de viabilitate a unei tranziţii:

Definiţia 4.2.9 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea Petri cu salturi marcată.*
*i) Un salt $r = (M_1, M_2) \in R$ este numit R-*viabil *dacă pentru orice marcare j-accesibilă $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$, marcarea M_1 este j-accesibilă de la marcarea M, i.e. $M_1 \in [M\rangle_{\gamma,j}$.*
*ii) Reţeaua γ este numită R-*viabilă *dacă toate salturile sale sunt R-viabile.*

Teorema 4.2.8 *Orice reţea Petri cu salturi Δ-finite marcată, mărginită, viabilă şi R-viabilă, este acoperită cu T-invarianţi.*

Demonstraţie. Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea cu salturi Δ-finite marcată, ce este mărginită, viabilă şi R-viabilă.
1) Deoarece reţeaua γ este mărginită, există un număr întreg $k \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ şi orice $s \in S$ să avem $M(s) \leq k$. Deducem că mulţimea de j-accesibilitate $[M_0\rangle_{\gamma,j}$ este finită, putând avea cel mult $(k+1)^{|S|}$ elemente. Fie $q = |[M_0\rangle_{\gamma,j}| \in \mathbb{N}$.

Fie $t \in T$ o tranziţie arbitrară a reţelei γ, fixată. Reţeaua fiind viabilă, t este viabilă, şi deci are loc:

$$\forall\, M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}\,, \exists\, M' \in [M\rangle_{\gamma,j} \text{ astfel încât } M'[t\rangle_{\gamma,j} \;\;,$$

sau echivalent:

$$\forall\, M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}\,, \exists\, M'' \in [M_0\rangle_{\gamma,j} \wedge \exists\, w \in T^* \text{ astfel încât } M\,[wt\rangle_{\gamma,j}\, M'' \quad (4.19)$$

unde $M'' = M' + \Delta t$.

Fie $M_1 \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ o marcare oarecare. Aplicând (4.19) pentru $M = M_1$, obţinem că există $M_2 \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ şi $w_1 \in T^*$ astfel încât $M_1\,[w_1t\rangle_{\gamma,j}\, M_2$. Apoi, aplicând (4.19) pentru $M = M_2$, deducem că există $M_3 \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ şi $w_2 \in T^*$ astfel încât $M_2\,[w_2t\rangle_{\gamma,j}\, M_3$. Iterând de q ori acest raţionament, obţinem că există $M_2, M_3, \ldots, M_{q+1} \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ şi $w_1, w_2, \ldots, w_q \in T^*$ astfel încât

$$M_1\;[w_1t\rangle_{\gamma,j}\; M_2\;[w_2t\rangle_{\gamma,j}\; M_3\;\ldots\; M_q\;[w_qt\rangle_{\gamma,j}\; M_{q+1}\;\;. \qquad (4.20)$$

Deci avem $q+1$ marcări $M_1, M_2, \ldots, M_{q+1}$, şi cum $|[M_0\rangle_{\gamma,j}| = q$, trebuie să existe doi indici l, k cu $1 \leq l < k \leq q+1$ astfel încât $M_l = M_k$.

Considerăm următoarea subsecvenţă a secvenţei de j-tranziţie (4.20) :

$$M_l\;[w_lt\rangle_{\gamma,j}\; M_{l+1}\;[w_{l+1}t\rangle_{\gamma,j}\;\ldots\; M_{k-1}\;[w_{k-1}t\rangle_{\gamma,j}\; M_k\;\;,$$

în care t apare cel puţin o dată deoarece $l < k$; deci avem că

$$M_l\,[w\rangle_{\gamma,j}\,M_k\,,\ \text{unde } w = w_l t w_{l+1} t \ldots w_{k-1} t\ \ . \tag{4.21}$$

Conform teoremei 4.2.1, pentru secvenţa de j-tranziţie (4.21) există un vector coloană pozitiv J_t astfel încât $M_k = M_l + I_\gamma \cdot J_t$; chiar mai mult, avem că $J_t(i) = \#(t_i, w)$, pentru orice $1 \le j \le n$. Cum $M_l = M_k$, rezultă că $I_\gamma {\cdot} J_t = \mathbf{0}$, deci J_t este un T-invariant pozitiv al reţelei γ, şi, în plus, $t \in P_{J_t}$ deoarece t apare cel puţin o dată în secvenţa w.

Întrucît $t \in T$ a fost aleasă arbitrară, deducem că pentru orice $t \in T$ există un T-invariant pozitiv J_t astfel încât $t \in P_{J_t}$.

2) Acum vom face un raţionament similar referitor la salturile reţelei.

Fie $r = (M_1, M_2) \in R$ un salt arbitrar al reţelei γ, fixat. Saltul r este R-viabil, deoarece γ este R-viabil. Prin urmare, avem că

$$\forall\, M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}\,, M_1 \in [M\rangle_{\gamma,j}\ \ ,$$

sau echivalent:

$$\forall\, M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}\,, \exists\, w \in T^*\ \text{astfel încât}\ M\,[w\rangle_{\gamma,j}\,M_1\,r\,M_2\ \ . \tag{4.22}$$

Aplicând (4.22) pentru $M = M_2$, obţinem că există $w_1 \in T^*$ astfel încât

$$M_2\,[w_1\rangle_{\gamma,j}\,M_1\,r\,M_2\ \ . \tag{4.23}$$

Pentru secvenţa de j-tranziţie (4.23), conform teoremei 4.2.1, există un vector coloană pozitiv J_r astfel încât $M_2 = M_2 + I_\gamma \cdot J_r$; chiar mai mult, avem că pentru orice $n{+}1 \le i \le n{+}p$, $J(i)$ este egal cu numărul total de apariţii ("ascunse") ale tuturor salturilor $r' \in R$ cu $\Delta r' = \Delta r_{i-n}$ în secvenţa de j-tranziţie (4.23). Aşadar, rezultă că $I_\gamma \cdot J_r = \mathbf{0}$, ceea ce înseamnă că J_r este un T-invariant pozitiv al reţelei γ, şi, în plus, avem $r \in P_{J_r}$ deoarece saltul r apare cel puţin o dată în secvenţa de j-tranziţie (4.23).

Întrucît saltul $r \in R$ a fost ales arbitrar, deducem că pentru orice $r \in R$ există un T-invariant pozitiv J_r astfel încât $r \in P_{J_r}$.

Din 1) şi 2) concluzionăm că reţeaua γ este acoperită cu T-invarianţi. $\square$

4.3 Modelare şi verificare

În această secţiune voi prezenta două exemple *originale* de utilizare a reţelelor Petri cu salturi în modelarea şi analiza sistemelor reale. Primul dintre acestea a fost publicat în revista Acta Cybernetica ([118]), iar al doilea este în curs de publicare ([124]).

De asemenea, am prezentat o comunicare cu acest subiect la un simpozion la Chişinău ([123]).

4.3.1 Sistemul expeditor – destinatar cu buffer de capacitate nelimitată

Considerăm un sistem format dintr-un expeditor (cu rol de producător) şi un destinatar (cu rol de consumator). Expeditorul produce mesaje şi le trimite spre destinatar, unul câte unul, prin intermediul unui canal de comunicaţie asincron (i.e. un buffer de capacitate nelimitată folosit pentru depozitarea mesajelor). Destinatarul primeşte mesajele din canal, unul cîte unul, şi le consumă.

În plus, expeditorul poate lua o pauză în activitatea sa în orice moment, dar în schimb este impusă restricţia ca destinatarul să poată trece în stare de repaus numai dacă expeditorul este în stare de repaus şi canalul de comunicaţie este gol (o restricţie ce este naturală în cadrul sistemelor automatizate).

Un sistem de acest tip, dar cu buffer de capacitate limitată, a fost modelat printr-o reţea P/T în [80] (model prezentat şi în [48], sau în subsecţiunea 4.1.4 din prima secţiune a acestui capitol). Din păcate, sistemul acesta cu buffer nelimitat nu poate fi modelat printr-o reţea Petri de tip P/T datorită faptului că testul de zero al unei locaţii cu capacitate infinită nu poate fi simulat de către reţelele P/T (o demonstraţie a acestui fapt poate fi găsită în [48]).

În [118] am prezentat o posibilă modelare a acestui sistem printr-o reţea Petri cu salturi finite. Această reţea este ilustrată în figura 4.19, avînd următoarele interpretări ale locaţiilor:

- s_1 marcată = expeditorul a terminat de transmis un mesaj şi este pregătit pentru a produce un nou mesaj sau a lua o pauză;
- s_2 marcată = expeditorul este pregătit pentru o nouă transmisie (a ultimului mesaj produs);
- s_3 marcată = expeditorul este inactiv (i.e., în stare de repaus);
- s_4 = bufferul nelimitat folosit pentru depozitarea mesajelor;

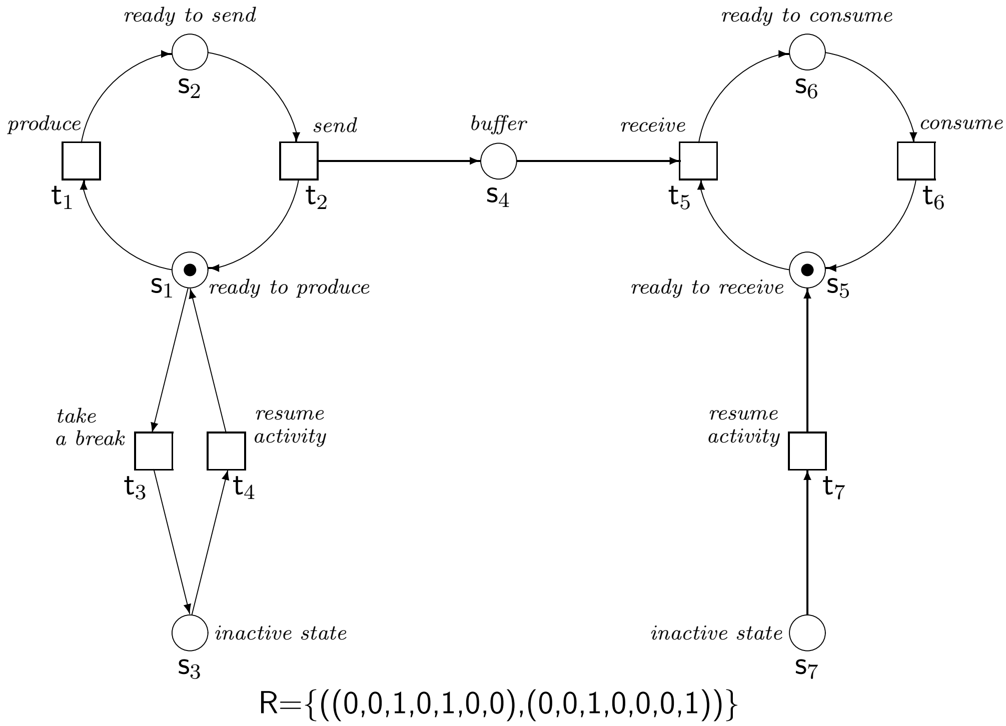


Figura 4.19: Sistem expeditor – destinatar cu buffer nelimitat

– s_5 marcată = destinatarul este pregătit pentru recepţionarea unui nou mesaj sau pentru a lua o pauză;

– s_6 marcată = destinatarul este pregătit pentru a consuma ultimul mesaj recepţionat;

– s_7 marcată = destinatarul este în stare de repaus.

Semnificaţia producerii tranziţiilor este următoarea:

– t_1 = expeditorul produce un nou mesaj;

– t_2 = expeditorul transmite mesajul produs;

– t_3 = expeditorul trece în repaus (i.e., ia o pauză);

– t_4 = expeditorul îşi reia activitatea;

– t_5 = destinatarul recepţionează un nou mesaj;

– t_6 = destinatarul consumă mesajul primit;

– t_7 = destinatarul îşi reia activitatea.

Trecerea destinatarului în starea inactivă, posibilă doar atunci cînd expeditorul este în stare de repaus şi nu există mesaje în buffer, este modelată prin saltul acestei reţele, ce se produce de la marcarea $M' = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$ la marcarea $M'' = (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$.

Spunem că sistemul expeditor – destinatar cu buffer nelimitat este *modelat corect* dacă modelul îndeplineşte următoarele proprietăţi:

(P$_1$) La orice moment de timp, expeditorul poate fi numai într-una din stările *pregătit pentru produs*, *pregătit pentru transmisie* sau *inactiv.*

(P$_2$) Analog, la orice moment de timp, destinatarul poate fi numai într-una din stările *pregătit pentru recepţie*, *pregătit pentru consum* sau *inactiv.*

(P$_3$) Bufferul de depozitare a mesajelor poate conţine oricît de multe mesaje;

(P$_4$) Destinatarul poate trece în starea de repaus numai dacă expeditorul este inactiv şi bufferul nu conţine mesaje.

(P$_5$) Sistemul este viabil, adică nu se blochează niciodată.

În continuare voi demonstra, utilizînd teoria invarianţilor, corectitudinea acestei modelări.

Teorema 4.3.1 *Reţeaua cu salturi din figura 4.19 modelează corect sistemul expeditor – destinatar cu buffer nelimitat.*

Demonstraţie. Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ reţeaua cu salturi din figura 4.19. Printr-un simplu calcul se arată că vectorii

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sunt S-invarianţi ai reţelei γ (ordinea pe locaţii este dată de ordinea pe indici). Mai mult, aceştia sunt singurii S-invarianţi minimali ai reţelei γ, orice alt S-invariant fiind o combinaţie liniară de forma $z_1 \cdot J_1 + z_2 \cdot J_2$, cu $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$.

Utilizând S-invariantul J_1 şi teorema de caracterizare a S-invarianţilor pentru reţele cu salturi (teorema 4.2.2), obţinem

$$M(s_1) + M(s_2) + M(s_3) = 1 \ , \tag{4.24}$$

pentru orice marcare j-accesibilă arbitrară a reţelei γ, $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$. Aceasta ne arată că expeditorul este într-una din cele trei stări prezentate la $(\mathbf{P_1})$. Deci, proprietatea $(\mathbf{P_1})$ este îndeplinită.

Similar, folosind S-invariantul J_2 obţinem

$$M(s_5) + M(s_6) + M(s_7) = 1 \ , \tag{4.25}$$

pentru orice marcare j-accesibilă arbitrară a reţelei γ, $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$. Aceasta ne arată că destinatarul este într-una din cele trei stări prezentate la $(\mathbf{P_2})$. Deci, şi proprietatea $(\mathbf{P_2})$ este îndeplinită.

Pentru a demonstra proprietatea $(\mathbf{P_3})$, să observăm că, dacă $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ este o marcare j-accesibilă oarecare în care expeditorul este activ (adică $M(s_1) = 1$), atunci, pentru orice întreg $k \in \mathbb{N}$, prin producerea secvenţei de tranziţie $w = (t_1t_2)^k$ la marcarea M, se obţine o marcare $M' \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ cu $M'(s_4) = M(s_4) + k$ şi $M'(s) = M(s)$, pentru restul locaţiilor reţelei. Aşadar pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există o marcare j-accesibilă $M' \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ cu $M'(s_4) \geq k$, ceea ce înseamnă că locaţia s_4 este nemărginită, adică bufferul de depozitare a mesajelor poate conţine oricît de multe mesaje.

Pentru a demonstra proprietatea $(\mathbf{P_4})$, să observăm că, dacă M este o marcare j-accesibilă arbitrară la care destinatarul este în repaus (adică $M(s_7) = 1$), atunci această marcare poate fi atinsă doar prin producerea saltului reţelei γ (deoarece $M \notin [M_0\rangle_\Sigma$, adică marcarea M este inaccesibilă în P/T-reţeaua suport a reţelei γ). Este clar că producerea saltului reţelei γ este posibilă numai la marcarea $M' = (0, 0, 1, 0, 1, 0, 0)$, adică numai dacă expeditorul este în starea de repaus ($M'(s_3) = 1$) şi bufferul de depozitare a mesajelor este gol ($M'(s_4) = 0$).

Pentru a arăta că reţeaua din figura 4.19 este viabilă, adică nu se blochează niciodată, vom arăta că la orice marcare j-accesibilă $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$, este j-posibilă cel puţin una dintre tranziţiile reţelei. Într-adevăr, tot din relaţia (4.24) mai rezultă şi faptul că la marcarea M fie sunt posibile tranziţiile t_1 şi t_3, dacă $M(s_1) = 1$, fie este posibilă tranziţia t_2, dacă $M(s_2) = 1$, fie este posibilă tranziţia t_4, dacă $M(s_3) = 1$. Prin urmare, reţeaua γ este viabilă, ceea ce demonstrează $(\mathbf{P_5})$.

Cu aceasta am încheiat demonstraţia proprietăţilor acestui model. $\square$

Să mai observăm faptul că din ultimul argument de mai sus rezultă că reţeaua γ este viabilă relativ la mulţimea de tranziţii $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ (i.e., acţiunile întreprinse de expeditor). Aceasta înseamnă că expeditorul este viabil, adică nu se blochează niciodată (la fiecare moment are cel puţin o acţiune posibilă).

Mai mult chiar, destinatarul (i.e. reţeaua γ relativ la mulţimea de tranziţii $\{t_5, t_6, t_7\}$) nu este viabil, dar este "aproape viabil", adică nu se blochează niciodată, exceptând cazul cînd expeditorul este activ şi bufferul este gol. Într-adevăr, din egalitatea (4.25) rezultă că la orice marcare j-accesibilă M singurele cazuri posibile sunt următoarele:

i) fie este posibilă tranziţia t_7 la M, dacă $M(s_7) = 1$;

ii) fie este posibilă tranziţia t_6 la M, dacă $M(s_6) = 1$;

iii) fie este posibilă tranziţia t_5 la M, dacă $M(s_5) = 1$ şi $M(s_4) > 0$;

iv) fie este j-posibilă tranziţia t_7 la M (după producerea în prealabil la M a saltului reţelei γ), dacă $M(s_5) = 1$, $M(s_4) = 0$ şi $M(s_3) = 1$;

v) doar în situaţia cînd $M(s_5) = 1$, $M(s_4) = 0$ şi $M(s_3) = 0$, i.e. în cazul cînd expeditorul este activ ("gata de produs" sau "gata de transmisie") şi bufferul pentru mesaje este gol, destinatarul nu are nici o acţiune imediat posibilă, ci doar după o acţiune a expeditorului (fie producerea unui mesaj, fie expedierea unui mesaj, fie trecerea sa în repaus).

Acest model al sistemului expeditor – destinatar cu buffer nelimitat, l-am publicat în revista Acta Cybernetica ([118]). Un alt model al acestui sistem, însoţit de asemenea de verificarea proprietăţilor pe baza tehnicii invarianţilor, l-am prezentat la conferinţa CAIM 2003 ([117]), utilizînd de data aceasta pentru modelare o reţea Petri cu inhibiţie (a se vedea anexa D de la sfîrşitul acestei lucrări).

4.3.2 Sistemul proceselor în citire concurentă/scriere exclusivă

Considerăm un sistem format dintr-un număr de n procese, $n > 0$, care pot citi sau scrie într-o anumită zonă de memorie. Citirea din memorie se poate face în mod concurent de către două sau mai multe procese, dar scrierea în memorie este exclusivă, adică atunci când un proces este în scriere toate celelalte procese nu pot scrie sau citi zona de memorie respectivă.

Un sistem de acest tip a fost modelat printr-o reţea clasică P/T în [80] (model prezentat şi în [48], sau în subsecţiunea 4.1.4 din prima secţiune a acestui capitol). Însă acel model are un neajuns major, şi anume faptul că structura reţelei depinde de datele de intrare (i.e., marcarea iniţială), mai precis depinde de numărul n de procese din sistem. Acest fapt este analog, în programare, cu un program a cărui cod depinde de datele de intrare, adică un program ce trebuie recompilat pentru fiecare set de date de intrare.

Într-o lucrare prezentată la conferinţa ICCC 2004 ([122]), am corectat acest neajuns, realizînd un alt model al acestui sistem, însoţit de verificarea proprietăţilor acestuia pe baza tehnicii invarianţilor. Acest model s-a bazat pe o altă idee, aceea de a utiliza testul de zero asupra locaţiilor pentru a permite unui proces să scrie memoria numai atunci cînd nu există nici un proces ce citeşte din memorie. Pentru aceasta am utilizat pentru modelare o reţea Petri cu inhibiţie (a se vedea anexa D de la sfîrşitul acestei lucrări).

În continuare, voi prezenta un model al acestui sistem folosind reţele Petri cu salturi, simulând testul de zero asupra locaţiilor prin salturi (după cum vom vedea, în acest caz va fi nevoie de o infinitate de salturi).

O posibilă modelare ([124]) a acestui sistem printr-o reţea Petri cu salturi este ilustrată în figura 4.20, cu interpretările locaţiilor specificate în continuare. Fiecare proces poate fi într-una din următoarele stări:

– s_1 = procesul execută o prelucrare locală (fără a accesa memoria);

– s_2 = procesul aşteaptă permisiunea să citească memoria;

– s_3 = procesul citeşte memoria;

– s_4 = procesul aşteaptă permisiunea să scrie memoria;

– s_5 = procesul scrie memoria.

În plus se utilizează o locaţie de sincronizare s_6 cu rol de semafor: ea va bloca celelalte procese ce doresc să citească sau să scrie memoria, atunci când unul dintre ele este în scriere. Iniţial, semaforul este marcat cu un punct (i.e., este "pe culoarea verde"). De asemenea, starea s_1 de prelucrare locală este marcată iniţial cu n puncte, n fiind numărul de procese din sistem.

Semnificaţia producerii tranziţiilor este următoarea:

– t_1 = unul dintre procese solicită o operaţie de citire;

– t_2 = unul dintre procesele solicitante primeşte permisiunea de a citi memoria şi începe operaţia de citire;

– t_3 = procesul termină operaţia de citire;

– t_4 = unul dintre procese solicită o operaţie de scriere;

– t_5 = procesul termină operaţia de scriere.

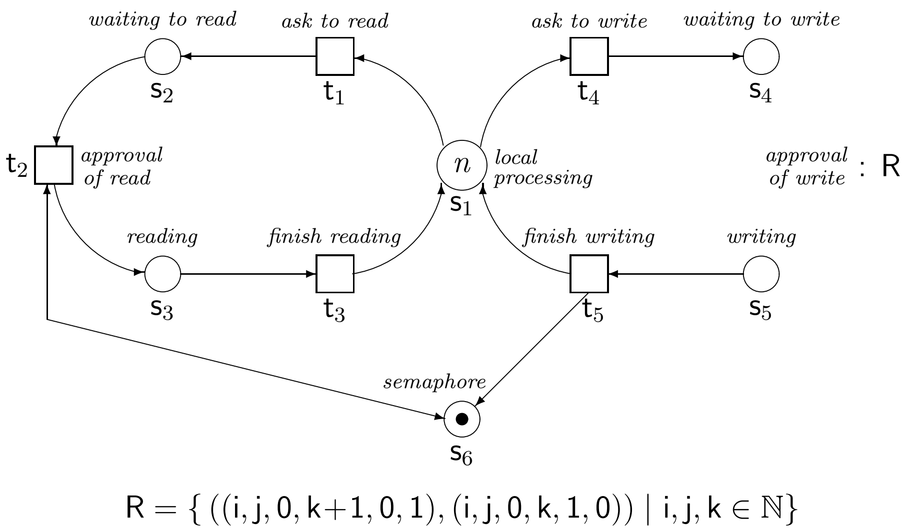


Figura 4.20: Procese în citire concurentă/scriere exclusivă

Primirea permisiunii de a citi memoria de către un proces solicitant, posibilă numai atunci cînd nici un proces nu este în starea de scriere a memoriei, este modelată prin arcul dublu al acestei reţele (i.e., arcurile $(s_6, t_2) \in F$ şi $(t_2, s_6) \in F$), care testează semaforul.

Primirea permisiunii de a scrie memoria de către un proces solicitant, posibilă numai atunci cînd nici un proces nu este în starea de citire sau de scriere a memoriei, este modelată printr-o mulţime infinită de salturi:

$$R = \{\, ((i, j, 0, k{+}1, 0, 1), (i, j, 0, k, 1, 0)) \mid i, j, k \in \mathbb{N}\} \,,$$

toate salturile fiind necesare, pentru ca mulţimea R să fie independentă de marcarea iniţială. Pentru o marcare iniţială fixată (i.e. pentru un întreg n fixat), din mulţimea R se vor folosi efectiv doar salturile ce satisfac condiţia $i + j + k + 1 = n$ (deci doar un număr finit de salturi), deoarece avem exact n procese în sistem (aflate în stările de prelucrare locală, de solicitare a unei citiri sau de citire, şi respectiv de solicitare a unei scrieri sau de scriere). Cu toate acestea, reţeaua din figura 4.20 este o reţea cu salturi Δ-finite, deoarece $\Delta R = \{\, (0, 0, 0, -1, 1, -1) \,\}$ (deci toate salturile au o aceeaşi variaţie).

Proprietăţile ce trebuie îndeplinite de o reţea pentru a fi considerată un *model corect* al sistemului proceselor în citire concurentă/scriere exclusivă sunt următoarele:

($\mathbf{Q_1}$) În orice moment, fiecare proces este fie *activ* (adică, într-una din stările "prelucrare locală", "citire" sau "scriere"), fie *inactiv* (adică, într-una din stările "aşteaptă să citească" sau "aşteaptă să scrie");

($\mathbf{Q_2}$) În orice moment, numărul proceselor aflate în sistem, atît active cît şi inactive, este constant, fiind egal cu n;

($\mathbf{Q_3}$) În orice moment, numărul proceselor ce pot fi în citire, este cuprins între 0 şi n;

($\mathbf{Q_4}$) În orice moment, dacă un proces se află în scriere, atunci toate celelalte procese din sistem nu pot scrie sau citi memoria;

($\mathbf{Q_5}$) Sistemul este viabil, adică nu se blochează niciodată.

În continuare voi demonstra, utilizînd teoria invarianţilor, corectitudinea acestei modelări.

Teorema 4.3.2 *Reţeaua cu salturi din figura 4.20 modelează corect sistemul proceselor în citire concurentă/scriere exclusivă.*

Demonstraţie. Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ reţeaua cu salturi Δ-finite reprezentată în figura 4.20. Printr-un simplu calcul se arată că vectorii

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sunt S-invarianţi ai reţelei γ (ordinea pe locaţii este dată de ordinea pe indici). Mai mult, aceştia sunt singurii S-invarianţi minimali ai reţelei γ, orice alt S-invariant fiind o combinaţie liniară de forma $z_1 \cdot J_1 + z_2 \cdot J_2$, cu $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$.

Utilizând S-invariantul J_1 şi teorema de caracterizare a S-invarianţilor pentru reţele cu salturi (teorema 4.2.2), obţinem

$$M(s_1) + M(s_2) + M(s_3) + M(s_4) + M(s_5) = n \ , \tag{4.26}$$

pentru orice marcare j-accesibilă arbitrară a reţelei γ, $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$. Aceasta ne arată că fiecare proces este într-una din cele cinci stări prezentate la ($\mathbf{Q_1}$) şi că numărul total de procese din sistem este n. Deci, proprietăţile ($\mathbf{Q_1}$) şi ($\mathbf{Q_2}$) sunt îndeplinite.

De asemenea, din (4.26) mai deducem că

$$0 \leq M(s_3) \leq n \, , \forall \, M \in [M_0\rangle_{\gamma,j} \, ,$$

ceea ce demonstrează şi proprietatea ($\mathbf{Q_3}$).

În mod similar, folosind S-invariantul J_2 obţinem

$$M(s_5) + M(s_6) = 1 \ , \tag{4.27}$$

pentru orice marcare j-accesibilă arbitrară a reţelei γ, $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$.

Din (4.27) deducem că

$$0 \leq M(s_5) \leq 1 \, , \forall \, M \in [M_0\rangle_{\gamma,j} \, .$$

Aceasta înseamnă că există cel mult un singur proces în starea de scriere la un moment dat, ceea ce demonstrează parţial proprietatea ($\mathbf{Q_4}$).

Pentru a completa demonstraţia proprietăţii ($\mathbf{Q_4}$), să observăm că, dacă $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ este o marcare j-accesibilă oarecare în care există un proces în starea de scriere (adică $M(s_5) = 1$), atunci această marcare poate fi atinsă doar prin producerea unui salt al reţelei γ, de forma

$$r = ((i, j, 0, k{+}1, 0, 1), (i, j, 0, k, 1, 0)) \, ,$$

ce satisface condiţia $i + j + k + 1 = n$ (aceasta deoarece $M \notin [M_0\rangle_\Sigma$, adică marcarea M este inaccesibilă în P/T-reţeaua suport a reţelei γ). Este clar că producerea unui astfel de salt al reţelei γ este posibilă numai la marcări de forma $M' = (i, j, 0, k{+}1, 0, 1)$, deci pentru care $M'(s_3) = 0$ (şi $M'(s_5) = 0$), adică numai dacă nici un proces nu se află în citire (şi nici în scriere, ceea ce este o reconfirmare a faptului deja demonstrat mai sus).

Deci un proces intră în starea de scriere numai dacă în acel moment nici un proces nu se află în citire (şi nici în scriere). Pe de altă parte, cît timp acest proces rămîne în starea de scriere (i.e. $M(s_5) = 1$), nici un alt proces nu poate intra în starea de citire (sau de scriere). Faptul că nici un alt proces nu poate intra în starea de citire este justificat de faptul că semaforul este “pe culoarea roşie” (întrucît $M(s_6) = 0$, care rezultă din (4.27) şi faptul că $M(s_5) = 1$). Iar faptul că nici un alt proces nu poate intra în starea de scriere este justificat de faptul deja demonstrat mai sus (şi anume că la orice moment există cel mult un singur proces în starea de scriere). Aceasta încheie demonstraţia proprietăţii ($\mathbf{Q_4}$).

Pentru a arăta că reţeaua din figura 4.20 este viabilă, adică nu se blochează niciodată, vom arăta că la orice marcare j-accesibilă $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$, este j-posibilă cel puţin una dintre tranziţiile reţelei.

Fie $M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$ o marcare j-accesibilă arbitrară a reţelei γ. Sunt posibile următoarele două situaţii:

i) $M(s_1)+M(s_3)+M(s_5) > 0$. În acest caz cel puţin una dintre tranziţiile t_1, t_4, t_3 sau t_5 este posibilă la M;

ii) $M(s_1) + M(s_3) + M(s_5) = 0$. În acest caz, din relaţiile (4.26) şi (4.27) deducem că $M(s_2) + M(s_4) = n$ şi $M(s_6) = 1$. Prin urmare cel puţin unul dintre numerele $M(s_2)$ şi $M(s_4)$ este nenul (deoarece $n > 0$). Dacă $M(s_2) > 0$, atunci tranziţia t_2 este posibilă la M. Iar dacă $M(s_4) > 0$, atunci tranziţia t_5 este j-posibilă la marcarea M (mai exact, la M se poate produce un salt de forma

$$r' = ((0, j, 0, k+1, 0, 1), (0, j, 0, k, 1, 0))\,, \text{ cu } j = n-1-k\,,$$

iar după producerea acestui salt, la marcarea rezultată va fi posibilă tranziţia t_5).

Cu aceasta am încheiat demonstraţia proprietăţilor acestui model. $\square$

4.4 Invarianţi pentru reţele de nivel înalt

Deoarece nu am rezultate originale în acest sens, pentru a nu mări în mod nejustificat lungimea acestei lucrări, în această secţiune mă voi limita la a indica cîteva referinţe bibliografice despre reţele Petri de nivel înalt şi tehnicile de algebră liniară utilizate în studiul proprietăţilor acestora, utile cititorului care doreşte să aprofundeze acest subiect.

După cum am discutat în capitolul introductiv, pentru a putea modela sisteme cu o complexitate sporită prin reţele nu prea complicate, deci uşor de studiat, după introducerea reţelelor Petri clasice (C/E-reţele şi P/T-reţele) următorul salt calitativ a fost să se considere că "punctele" din locaţii pot fi obiecte individuale, ce pot fi diferenţiate între ele. Astfel s-au introdus reţelele Petri de nivel înalt:

- reţele Pr/E (predicat/eveniment), care reprezintă generalizarea reţelelor C/E prin introducerea obiectelor individuale ca "puncte" în locaţii;
- reţele Pr/T (predicat/tranziţie), reţele relaţionale şi reţele colorate, care reprezintă generalizarea reţelelor P/T prin introducerea obiectelor individuale ca "puncte" în locaţii.

Reţelele predicat/tranziţie ([25, 23]), reţelele relaţionale ([80, 81]) şi, respectiv, reţelele colorate ([40, 41]) sunt diverse variante de definire a unei aceleaşi categorii de reţele Petri: reţele P/T generalizate în sensul că "punctele" din locaţii sunt obiecte individuale, aceste categorii de reţele avînd aceeaşi putere de calcul şi aceeaşi putere de modelare, diferenţiindu-se între ele doar prin suportul matematic utilizat şi, drept consecinţă, prin modalitatea în care se atinge uşurinţa de modelare. Astfel, suportul folosit în cazul reţelelor Pr/T şi a celor colorate în forma CP-graf este unul logic (i.e., o reprezentare expresională a elementelor reţelei), pe cînd în cazul reţelelor relaţionale şi a celor colorate în forma CP-matrice este folosit un suport algebric (i.e., o reprezentare algebrică a elementelor reţelei).

Reprezentarea expresională implică anumite dificultăţi datorită variabilelor atunci cînd se încearcă construirea unui calcul al invarianţilor pentru aceste reţele. În schimb, reprezentarea algebrică permite cu uşurinţă extinderea metodei invarianţilor de la reţele P/T la aceste tipuri de reţele.

Ca atare, s-a definit calculul cu invarianţi doar pentru reţelele relaţionale şi CP-matrice, dar acest fapt nu prezintă vreun incovenient important, toate aceste tipuri de reţele fiind echivalente între ele, după cum am amintit în capitolul introductiv.

Pentru o prezentare a S-invarianţilor şi T-invarianţilor şi a aplicaţiilor acestora pentru reţele colorate (în forma CP-matrice) se pot consulta lucrările [40, 43], iar pentru reţele relaţionale lucrarea [80]. De asemenea, alte lucrări utile, despre analiza reţelelor de nivel înalt prin tehnica invarianţilor, ar fi [68, 44]. Merită menţionat şi faptul că aplicaţia software `Design/CPN` ([134]) pentru reţele colorate suportă şi metodele de analiză pentru acestea, bazate pe grafuri de apariţie reduse şi tehnica invarianţilor.

Ca o ultimă observaţie la această secţiune, voi reaminti faptul că reprezentarea CP-matrice a reţelelor colorate este necesară doar pentru analiza cu invarianţi, pentru toate celelalte scopuri fiind suficientă reprezentarea lor în forma CP-graf (a se vedea [42, 43]). Această observaţie prezintă importantă pentru utilizarea practică a reţelelor colorate: ea înseamnă că reprezentarea CP-matrice şi translaţiile (ce necesită efort matematic) nu mai fac parte din definiţia de bază a reţelelor colorate, ci fac parte din metoda invarianţilor pentru analiză (care oricum necesită deprinderi matematice considerabile).

Capitolul 5

Grade de concurenţă

Reţelele Petri sunt un model matematic utilizat pentru specificarea şi analiza sistemelor paralele, concurente şi distribuite. Ca atare, este foarte util să avem o măsură a concurenţei existente în asemenea sisteme, pentru a putea răspunde la întrebări de genul: Care este semnificaţia faptului că în sistemul S_1 concurenţa este mai mare decît în sistemul S_2?

O asemenea măsură o constituie *gradele de concurenţă* a unei reţele Petri, ce au fost introduse de colectivul de cercetare de la Facultatea de Informatică din Iaşi în [98] (a se vedea şi [48]).

Problema concurenţei şi a măsurării ei este studiată pentru reţele Petri, dar, cum acestea sunt utilizate drept modele adecvate pentru sistemele paralele sau distribuite din lumea reală, rezultatele sunt aplicabile şi acestor sisteme. Mai exact, vom vedea că numărul de tranziţii care se pot produce simultan într-o reţea Petri ce modelează un sistem real dat, poate fi utilizat ca o măsură intuitivă a concurenţei acelui sistem.

Ca urmare, gradele de concurenţă au importanţă practică în activitatea de modelare şi analiză a sistemelor reale prin reţele Petri. Spre exemplu, ele sunt utile pentru evaluarea modelelor în etapa de proiectare a unui sistem real paralel sau distribuit: după realizarea unui model al acelui sistem, studiul gradului de concurenţă al modelului va furniza informaţii proiectanţilor despre concurenţa sistemului, permiţîndu-le să observe componentele sistemului ce sunt ineficiente, adică componentele cu "gîtuiri" din punct de vedere al paralelismului/concurenţei (datorate unei utilizări neoptime a resurselor sistemului, sau datorate altor cauze), şi să îmbunătăţească modelul prin remodelarea acelor componente cu scopul eliminării cauzelor acelor "gîtuiri". În acest fel, evaluarea modelului poate produce *feedback* util fazelor anterioare din procesul de proiectare a acelui sistem, chiar şi pînă la prima fază, cea a specificaţiilor sistemului, pentru efectuarea unor îmbunătăţiri în faza respectivă, cu scopul creşterii performanţei globale a sistemului proiectat.

5.1 Grade de concurenţă pentru reţele P/T

După cum am amintit mai devreme, noţiunea de grade de concurenţă pentru reţele Petri P/T a fost introdusă pentru prima dată de colectivul de cercetare de la Facultatea de Informatică din Iaşi în lucrarea [98] (acea definiţie iniţială poate fi găsită şi în monografia [48]).

În lucrarea (Jucan & Vidraşcu [49]) am introdus o definiţie simplificată, mai intuitivă, a noţiunii de grade de concurenţă pentru reţele P/T. De asemenea, am arătat cum se pot calcula toate cele trei categorii de grade de concurenţă definite (i.e., gradul local la o marcare oarecare, şi gradele globale, inferior şi superior, care iau în calcul gradele locale corespunzătoare tuturor marcărilor accesibile ale reţelei). Din motivul expus în continuare, nu voi mai prezenta în această lucrare definiţiile gradelor de concurenţă şi algoritmii de calcul al acestora descrişi în lucrarea [49].

Şi anume, ambele definiţii, şi cea iniţială din [98], şi cea simplificată din [49], au un neajuns major: ele iau în considerare numai tranziţii distincte ce se pot produce simultan la o marcare, cu alte cuvinte aceste variante de definire a gradelor de concurenţă consideră noţiunea de *pas posibil la o marcare* ca fiind o submulţime de tranziţii. Prin urmare, ele ignoră *auto-concurenţa*, i.e. cazul unei tranziţii posibile simultan cu ea însăşi la o marcare.

Evident, există posibilitatea, în general, de a avea o tranziţie posibilă simultan cu ea însăşi la o marcare. Ca atare, am introdus o nouă definiţie, mai generală, a noţiunii de grade de concurenţă pentru reţele P/T, care ia în considerare şi situaţia tranziţiilor posibile simultan cu ele însele la o marcare.

În plus, am introdus şi o noţiune mai fină, aceea de *grade de concurenţă relativ la un set de tranziţii*, care ignoră anumite tranziţii ale reţelei.

În această secţiune voi prezenta această definiţie mai generală a gradelor de concurenţă, precum şi modul de calcul al acestora, pe baza *rezultatelor originale* publicate în lucrarea (Vidraşcu & Jucan [131]), precum şi în raportul tehnic [127]. De asemenea, am prezentat o comunicare cu acest subiect la un simpozion la Chişinău ([115]).

În plus, în ultima parte a acestei secţiuni am prezentat cîteva rezultate şi observaţii legate de analiza modulară a concurenţei în reţele Petri.

5.1.1 Definirea gradelor de concurenţă

Mai întîi, voi defini noţiunea de *pas posibil la o marcare* ca un multiset de tranziţii, în loc de o submulţime de tranziţii, iar apoi voi defini gradele de concurenţă pe baza acestei noţiuni de pas posibil la o marcare. Stilul de prezentare este asemănător cu cel din cazul definiţiei vechi ([49]).

Definiţia 5.1.1 *Fie* $\Sigma = (S, T, F, W)$ *o reţea P/T. Se numeşte* pas Y *al reţelei* Σ *orice multiset nevid şi finit peste mulţimea tranziţiilor* T*. Vom nota prin* $\mathbb{Y}(\Sigma)$ *mulţimea tuturor paşilor reţelei* Σ*, adică*

$$\mathbb{Y}(\Sigma) = \{Y \in T_{MS} \mid Y \neq \emptyset \wedge |Y| < \infty\} .$$

Definiţia 5.1.2 *Fie* Σ *o reţea P/T şi* M *o marcare arbitrară a lui* Σ.
i) Evoluţia concurentă prin paşi a reţelei Σ *este dată de* regula de tranziţie într-un pas*, care constă în:*

(RA) regula de aplicabilitate *a unui pas:*
Un pas Y *este* posibil *la marcarea* M *în* Σ *(sau* Y *se poate* produce *la* M*), şi mai spunem de asemenea că* Y *este un multiset de tranziţii concurent posibile la* M*, abreviat* $M\,[Y\rangle_\Sigma$ *, dacă şi numai dacă*

$$\sum_{t \in T} Y(t) \cdot t^- \leq M ;$$

(RC) regula de calcul *a unui pas:*
Dacă pasul Y *este posibil la marcarea* M *în* Σ*, atunci* Y *poate* apare *la* M *producînd o nouă marcare* M'*, abreviat* $M\,[Y\rangle_\Sigma\, M'$*, definită prin:*

$$M' = \left(M - \sum_{t \in T} Y(t) \cdot t^- \right) + \sum_{t \in T} Y(t) \cdot t^+ .$$

ii) Un pas Y *este numit* pas maximal posibil *la marcarea* M *în* Σ*, dacă* Y *este pas posibil la* M *şi nu există nici un pas* Y' *posibil la* M *cu* $Y' > Y$.

Notaţia 5.1.1 *Fie* $\Sigma = (S, T, F, W)$ *o reţea P/T şi* M *o marcare arbitrară a reţelei* Σ.
i) $T(\Sigma, M)$ *denotă mulţimea tuturor tranziţiilor posibile la marcarea* M *în* Σ*:*

$$T(\Sigma, M) = \{t \in T \mid M\,[t\rangle_\Sigma\} ;$$

ii) $\mathbb{Y}(\Sigma, M)$ *denotă mulţimea tuturor paşilor posibili la marcarea* M *în* Σ*, adică mulţimea tuturor multiseturilor de tranziţii concurent posibile la* M*:*

$$\mathbb{Y}(\Sigma, M) = \{Y \in \mathbb{Y}(\Sigma) \mid M\,[Y\rangle_\Sigma\} ;$$

iii) $\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M)$ *denotă mulţimea tuturor paşilor maximali posibili la marcarea* M *în* Σ*:*

$$\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M) = \{Y \in \mathbb{Y}(\Sigma, M) \mid \forall Y' \in \mathbb{Y}(\Sigma) : Y' > Y \Rightarrow Y' \notin \mathbb{Y}(\Sigma, M)\} .$$

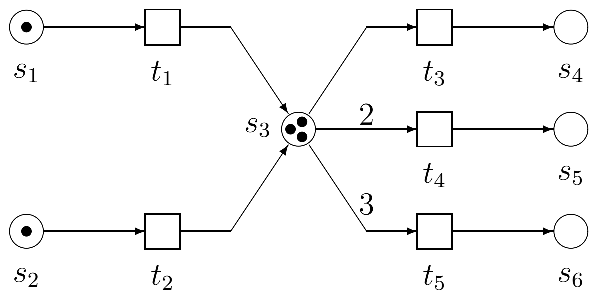


Figura 5.1: Reţeaua P/T din exemplul 5.1.1

Observaţia 5.1.1 *În general vorbind, pot exista mai multe multiseturi maximale de tranziţii concurent posibile la o marcare M. Mai mult, maximalitatea multiseturilor relativ la concurenţă nu implică maximalitatea multiseturilor relativ la dimensiunea lor, i.e. putem avea doi paşi maximali Y_1 şi Y_2 posibili la o marcare M, cu $|Y_1| < |Y_2|$.*

Exemplul 5.1.1 *Pentru reţeaua P/T marcată $\gamma = (\Sigma, M_0)$ reprezentată în figura 5.1, se poate observa cu uşurinţă că multiseturile $Y_1 = t_1 + t_2 + 3`t_3$, $Y_2 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$, şi $Y_3 = t_1 + t_2 + t_5$ sunt paşi maximali posibili la marcarea iniţială a lui γ, şi, mai mult, aceştia sunt singurii paşi maximali, i.e. $\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M_0) = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$.*

Observaţia 5.1.2 *Fie Σ o reţea P/T, şi fie $T_0 = \{t \in T \mid {}^\bullet t = \emptyset\}$ mulţimea tranziţiilor cu premulţimea vidă, adică T_0 este mulţimea tranziţiilor posibile întotdeauna la orice marcare a reţelei Σ.*

Dacă $T_0 = \emptyset$, atunci este uşor de remarcat că mulţimile $\mathbb{Y}(\Sigma, M)$ şi $\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M)$ sunt finite, pentru orice marcare arbitrară M a lui Σ.

Altfel, dacă $T_0 \neq \emptyset$, atunci, pentru orice marcare arbitrară M a lui Σ, $\mathbb{Y}(\Sigma, M)$ este mulţime infinită, şi $\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M) = \emptyset$. Într-adevăr, există cel puţin o tranziţie $t_0 \in T_0$, deoarece $T_0 \neq \emptyset$, şi prin urmare $t_0 \in \mathbb{Y}(\Sigma, M)$. Deci $\mathbb{Y}(\Sigma, M) \neq \emptyset$, şi rezultă că, dacă $Y \in \mathbb{Y}(\Sigma, M)$ este un pas arbitrar posibil la marcarea M, atunci şi $Y_k = Y + k \cdot t_0 \in \mathbb{Y}(\Sigma, M)$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Deci $\mathbb{Y}(\Sigma, M)$ este infinită. Mai mult, pentru orice pas $Y \in \mathbb{Y}(\Sigma, M)$, mulţimea $\mathbb{Y}(\Sigma, M)$ conţine acest şir infinit strict crescător de paşi $\{Y_k\}_{k \geq 0}$, ce converge la limita $Y^* : T \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, definită prin

$$Y^*(t) = \begin{cases} \infty & \text{, dacă } t^- = 0 \\ Y(t) & \text{, altfel} \end{cases} \quad \text{, pentru orice } t \in T.$$

Este evident că în acest caz nu există nici un pas maximal posibil la M, deci $\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M) = \emptyset$.

Definiţia 5.1.3 *Fie Σ o reţea P/T şi M o marcare arbitrară a reţelei Σ.* Gradul de concurenţă la marcarea *M a reţelei Σ este definit prin:*

$$d(\Sigma, M) = \sup\{\ |Y| \ \mid Y \in \mathbb{Y}(\Sigma, M)\}\ . \tag{5.1}$$

Observaţia 5.1.3 *Gradul de concurenţă la marcarea M a unei P/T-reţele Σ reprezintă, intuitiv, numărul suprem de tranziţii concurent posibile la M. Cu alte cuvinte, există cel mult $d(\Sigma, M)$ tranziţii concurent posibile la M.*

Observaţia 5.1.4 *Direct de la definiţie şi observaţia 5.1.2 rezultă că*
a) dacă $\forall\, t \in T : {}^\bullet t \neq \emptyset$, atunci

$$d(\Sigma, M) = \max\{\ |Y| \ \mid Y \in \mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M)\ \}\,, \tag{5.2}$$

pentru orice marcare $M \in \mathbb{N}^S$ (şi nu depinde de marcarea iniţială);
b) dacă $\exists\, t \in T : {}^\bullet t = \emptyset$, atunci $d(\Sigma, M) = \infty$, pentru orice marcare $M \in \mathbb{N}^S$.

Observaţia 5.1.5 *Gradul de concurenţă la o marcare a unei reţele P/T este o funcţie monoton crescătoare în raport cu marcarea, i.e.*

$$M_1 \leq M_2 \ \Rightarrow\ d(\Sigma, M_1) \leq d(\Sigma, M_2)\,. \tag{5.3}$$

Justificare*: acest fapt rezultă imediat din proprietatea de monotonie a regulii de aplicabilitate a unui pas la o marcare:*

$$\textit{dacă } M_1[Y\rangle_\Sigma \textit{ şi } M_1 \leq M_2,\textit{ atunci } M_2[Y\rangle_\Sigma\,,$$

pe baza căreia rezultă că $M_1 \leq M_2 \ \Rightarrow\ \mathbb{Y}(\Sigma, M_1) \subseteq \mathbb{Y}(\Sigma, M_2)$, de unde, trecînd la suprem conform definiţiei 5.1.3, se obţine afirmaţia (5.3).

Definiţia 5.1.4 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată.*
i) Gradul inferior de concurenţă *a reţelei γ este definit prin:*

$$d^-(\gamma) = \min\{\ d(\Sigma, M) \mid M \in [M_0\rangle_\gamma\} \tag{5.4}$$

ii) Gradul superior de concurenţă *a reţelei γ este definit prin:*

$$d^+(\gamma) = \sup\{\ d(\Sigma, M) \mid M \in [M_0\rangle_\gamma\} \tag{5.5}$$

iii) Dacă $d^-(\gamma) = d^+(\gamma)$, atunci notăm acest număr cu $d(\gamma)$, şi îl numim gradul de concurenţă *a reţelei γ.*

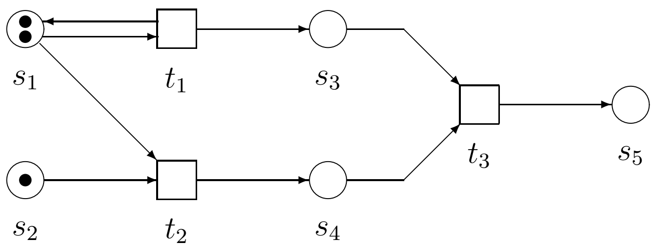


Figura 5.2: Reţeaua P/T din exemplul 5.1.2

Observaţia 5.1.6 *Direct de la definiţii avem*

1) $0 \leq d^-(\gamma) \leq d^+(\gamma) \leq \infty$.

2) Gradul inferior de concurenţă a reţelei γ reprezintă numărul minim de tranziţii maximal concurent posibile la orice marcare accesibilă a reţelei γ. Cu alte cuvinte, la orice marcare accesibilă M a reţelei γ există $d^-(\gamma)$ tranziţii concurent posibile la M.

3) Gradul superior de concurenţă a reţelei γ reprezintă numărul suprem de tranziţii maximal concurent posibile la orice marcare accesibilă a reţelei γ. Cu alte cuvinte, la orice marcare accesibilă M a reţelei γ există cel mult $d^+(\gamma)$ tranziţii concurent posibile la M.

4) Gradul de concurenţă a reţelei γ semnifică faptul că la orice marcare accesibilă M a reţelei γ există $d(\gamma)$ tranziţii concurent posibile la M, şi nu există nici o marcare accesibilă M' cu mai mult de $d(\gamma)$ tranziţii concurent posibile la M'.

Exemplul 5.1.2 *Pentru P/T-reţeaua marcată $\gamma = (\Sigma, M_0)$ din figura 5.2, se observă cu uşurinţă că pasul t_1 este posibil la orice marcare accesibilă, i.e.*

$$t_1 \in \mathbb{Y}(\Sigma, M)\,, \text{ pentru orice } M \in [M_0\rangle_\gamma\,,$$

ceea ce înseamnă că gradul inferior de concurenţă a reţelei γ este cel puţin unu: $d^-(\gamma) \geq 1$.

Mai mult, este uşor de observat că tranziţia t_2 poate apare cel mult o singură dată în orice secvenţă de tranziţie de la marcarea iniţială, şi că tranziţia t_3 poate apare de asemenea cel mult o dată, şi numai după apariţia lui t_2.

De asemenea, tranziţiile t_2 şi t_3 nu sunt concurent posibile cu ele însele la nici o marcare. Iar tranziţia t_1 este concurent posibilă cu ea însăşi (de 2 ori) la toate marcările ce preced producerea tranziţiei t_2, în orice secvenţă de tranziţie de la marcarea iniţială.

Prin urmare, mulţimea tuturor secvenţelor de tranziţie de la marcarea iniţială ale reţelei γ este

$$TS(\gamma) = \{t_1^i | i \in \mathbb{N}\} \cup \{t_1^i \cdot t_2 \cdot t_1^j | i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{t_1^i \cdot t_2 \cdot t_1^j \cdot t_3 \cdot t_1^l | i, j, l \in \mathbb{N}, i+j \geq 1\}.$$

Iar mulţimea de accesibilitate a reţelei γ este

$$[M_0\rangle_\gamma = \{M_k, M'_k, M''_k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

unde:

- $M_k = (2, 1, k, 0, 0)$ *este marcarea accesibilă de la M_0 prin producerea secvenţei de tranziţie t_1^k;*
- $M'_k = (1, 0, k, 1, 0)$ *este marcarea accesibilă de la M_0 prin producerea oricărei secvenţe de tranziţie de forma $t_1^i \cdot t_2 \cdot t_1^j$, cu $i + j = k$;*
- $M''_k = (1, 0, k, 0, 1)$ *este marcarea accesibilă de la M_0 prin producerea oricărei secvenţe de tranziţie de forma $t_1^i \cdot t_2 \cdot t_1^j \cdot t_3 \cdot t_1^l$, cu $i + j - 1 + l = k$.*

Se observă uşor că mulţimile de paşi maximali posibili la marcările accesibile ale reţelei γ sunt următoarele:

- $\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M_k) = \{2`t_1, t_1 + t_2\}$, $\forall k \geq 0$;
- $\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M'_0) = \{t_1\}$ *şi* $\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M'_k) = \{t_1 + t_3\}$, $\forall k \geq 1$;
- $\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M''_k) = \{t_1\}$, $\forall k \geq 0$.

Prin urmare, gradele de concurenţă la marcările accesibile ale reţelei γ sunt:

- $d(\Sigma, M_k) = 2$, $\forall k \geq 0$;
- $d(\Sigma, M'_0) = 1$ *şi* $d(\Sigma, M'_k) = 2$, $\forall k \geq 1$;
- $d(\Sigma, M''_k) = 1$, $\forall k \geq 0$.

Deducem că gradul inferior de concurenţă a reţelei γ este $d^-(\gamma) = 1$, iar gradul superior de concurenţă este $d^+(\gamma) = 2$.

După cum se poate vedea şi din observaţia 5.1.2, uneori poate fi util să se ignore o parte dintre tranziţiile unei reţele P/T atunci cînd se calculează gradele ei de concurenţă, şi să se studieze comportamentul reţelei relativ la celelalte tranziţii. Din acest motiv, voi introduce în continuare noţiunea de grade de concurenţă a unei reţele P/T relativ la un subset de tranziţii.

Definiţia 5.1.5 *Fie* $\Sigma = (S, T, F, W)$ *o reţea* P/T *şi* $T' \subseteq T$ *o submulţime de tranziţii. Un* T'-pas Y *este un pas ce satisface* $Y(t) = 0$*, pentru orice* $t \in T - T'$ *(practic,* Y *este un multiset nevid şi finit peste submulţimea* T'*). Ca urmare, prin* $\mathbb{Y}|_{T'}(\Sigma) = \mathbb{Y}(\Sigma) \cap T'_{MS}$ *vom nota mulţimea tuturor* T'*-paşilor reţelei* Σ.

În plus, vom nota prin $\mathbb{Y}|_{T'}(\Sigma, M)$ *mulţimea tuturor* T'*-paşilor posibili la* M *în* Σ*, i.e.* $\mathbb{Y}|_{T'}(\Sigma, M) = \mathbb{Y}(\Sigma, M) \cap T'_{MS}$*, iar prin* $(\mathbb{Y}|_{T'})_{max}(\Sigma, M)$ *mulţimea tuturor* T'*-paşilor maximali ce sunt posibili la marcarea* M *în* Σ*, i.e.* $(\mathbb{Y}|_{T'})_{max}(\Sigma, M) = maximal(\, \mathbb{Y}|_{T'}(\Sigma, M)\,)$.

Definiţia 5.1.6 *Fie* $\Sigma = (S, T, F, W)$ *o reţea* P/T*,* $T' \subseteq T$ *o submulţime de tranziţii, şi* M *o marcare arbitrară a lui* Σ*.* Gradul de concurenţă relativ la T' la marcarea M *a reţelei* Σ*, notat cu* $d(\Sigma, T', M)$*, este definit înlocuind* $\mathbb{Y}(\Sigma, M)$ *cu* $\mathbb{Y}|_{T'}(\Sigma, M)$ *în relaţia* (5.1).

Definiţia 5.1.7 *Fie* $\gamma = (\Sigma, M_0)$ *o reţea* P/T *marcată, şi* $T' \subseteq T$ *o submulţime de tranziţii.* Gradul inferior, şi respectiv superior, de concurenţă relativ la T' *a reţelei* γ*, notat cu* $d^-(\gamma, T')$*, şi respectiv* $d^+(\gamma, T')$*, este definit înlocuind* $d(\Sigma, M)$ *cu* $d(\Sigma, T', M)$ *în relaţia* (5.4)*, şi respectiv* (5.5).

În plus, dacă $d^-(\gamma, T') = d^+(\gamma, T')$*, atunci acest număr este notat cu* $d(\gamma, T')$ *şi este numit* gradul de concurenţă relativ la T' *a reţelei* γ.

Şi pentru aceste noţiuni vizînd gradele de concurenţă relativ la o submulţime de tranziţii au loc observaţii asemănătoare observaţiilor 5.1.3, 5.1.4, 5.1.5 şi 5.1.6 valabile pentru noţiunile generale de mai înainte.

Exemplul 5.1.3 *Pentru* P/T*-reţeaua marcată* $\gamma = (\Sigma, M_0)$ *din exemplul 5.1.2, dacă ignorăm tranziţiile* t_2 *şi* t_3*, atunci gradele inferior şi superior de concurenţă relativ la tranziţia* t_1 *sunt* $d^-(\gamma, \{t_1\}) = 1$ *şi* $d^+(\gamma, \{t_1\}) = 2$*. Aceasta se justifică observînd faptul că mulţimile de* $\{t_1\}$*-paşi maximali posibili la marcările accesibile ale reţelei* γ *sunt următoarele:*

- $(\mathbb{Y}|_{\{t_1\}})_{max}(\Sigma, M_k) = \{2`t_1\},\ \forall\, k \geq 0\,;$
- $(\mathbb{Y}|_{\{t_1\}})_{max}(\Sigma, M'_k) = (\mathbb{Y}|_{\{t_1\}})_{max}(\Sigma, M''_k) = \{t_1\},\ \forall\, k \geq 0\,,$

şi, ca urmare, gradele de concurenţă relativ la tranziţia t_1 *la marcările accesibile ale reţelei* γ *sunt următoarele:*

- $d(\Sigma, \{t_1\}, M_k) = 2,\ \forall\, k \geq 0\,;$
- $d(\Sigma, \{t_1\}, M'_k) = d(\Sigma, \{t_1\}, M''_k) = 1,\ \forall\, k \geq 0\,.$

Relativ la tranziţia t_2 *gradele inferior şi superior de concurenţă sunt* $d^-(\gamma, \{t_2\}) = 0$ *şi* $d^+(\gamma, \{t_2\}) = 1$. *Aceasta deoarece mulţimile de* $\{t_2\}$*-paşi maximali posibili la marcările accesibile ale reţelei* γ *sunt următoarele:*

- $(\mathbb{Y}|_{\{t_2\}})_{max}(\Sigma, M_k) = \{t_2\}$, $\forall\, k \geq 0$;
- $(\mathbb{Y}|_{\{t_2\}})_{max}(\Sigma, M'_k) = (\mathbb{Y}|_{\{t_2\}})_{max}(\Sigma, M''_k) = \emptyset$, $\forall\, k \geq 0$,

şi, ca urmare, gradele de concurenţă relativ la tranziţia t_2 *la marcările accesibile ale reţelei* γ *sunt următoarele:*

- $d(\Sigma, \{t_2\}, M_k) = 1$, $\forall\, k \geq 0$;
- $d(\Sigma, \{t_2\}, M'_k) = d(\Sigma, \{t_2\}, M''_k) = 0$, $\forall\, k \geq 0$.

Relativ la tranziţia t_3, *gradele inferior şi superior de concurenţă sunt similare cu cele relativ la tranziţia* t_2, *i.e.* $d^-(\gamma, \{t_3\}) = 0$ *şi* $d^+(\gamma, \{t_3\}) = 1$, *întrucît gradele de concurenţă relativ la tranziţia* t_3 *la marcările accesibile ale reţelei* γ *sunt după cum urmează:*

- $d(\Sigma, \{t_3\}, M_k) = 0$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_3\}})_{max}(\Sigma, M_k) = \emptyset$, $\forall\, k \geq 0$;
- $d(\Sigma, \{t_3\}, M'_0) = 0$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_3\}})_{max}(\Sigma, M'_0) = \emptyset$, *şi*
  $d(\Sigma, \{t_3\}, M'_k) = 1$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_3\}})_{max}(\Sigma, M'_k) = \{t_3\}$, $\forall\, k \geq 1$;
- $d(\Sigma, \{t_3\}, M''_k) = 0$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_3\}})_{max}(\Sigma, M''_k) = \emptyset$, $\forall\, k \geq 0$.

În plus, să mai remarcăm faptul că, dacă ignorăm tranziţia t_3, *atunci gradele inferior şi superior de concurenţă relativ la setul de tranziţii* $\{t_1, t_2\}$ *sunt* $d^-(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 1$ *şi* $d^+(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 2$. *Aceasta deoarece gradele de concurenţă relativ la* $\{t_1, t_2\}$ *la marcările accesibile sunt după cum urmează:*

- $d(\Sigma, \{t_1, t_2\}, M_k) = 2$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_2\}})_{max}(\Sigma, M_k) = \{2\grave{}t_1, t_1 + t_2\}$, $\forall\, k \geq 0$;
- $d(\Sigma, \{t_1, t_2\}, M'_k) = 1$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_2\}})_{max}(\Sigma, M'_k) = \{t_1\}$, $\forall\, k \geq 0$;
- $d(\Sigma, \{t_1, t_2\}, M''_k) = 1$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_2\}})_{max}(\Sigma, M''_k) = \{t_1\}$, $\forall\, k \geq 0$.

Mai mult, dacă ignorăm tranziţia t_2, *avem grade inferior şi superior relativ la setul de tranziţii* $\{t_1, t_3\}$ *similare cu cele relativ la* $\{t_1, t_2\}$, *i.e.* $d^-(\gamma, \{t_1, t_3\}) = 1$ *şi* $d^+(\gamma, \{t_1, t_3\}) = 2$, *întrucît gradele de concurenţă relativ la* $\{t_1, t_3\}$ *la marcările accesibile ale reţelei* γ *sunt după cum urmează:*

- $d(\Sigma, \{t_1, t_3\}, M_k) = 2$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_3\}})_{max}(\Sigma, M_k) = \{2\grave{}t_1\}$, $\forall\, k \geq 0$;
- $d(\Sigma, \{t_1, t_3\}, M'_0) = 1$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_3\}})_{max}(\Sigma, M'_0) = \{t_1\}$, *şi*
  $d(\Sigma, \{t_1, t_3\}, M'_k) = 2$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_3\}})_{max}(\Sigma, M'_k) = \{t_1 + t_3\}$, $\forall\, k \geq 1$;
- $d(\Sigma, \{t_1, t_3\}, M''_k) = 1$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_3\}})_{max}(\Sigma, M''_k) = \{t_1\}$, $\forall\, k \geq 0$.

5.1.2 Calculul gradelor de concurenţă

În continuare voi prezenta modul de calcul a gradelor de concurenţă pentru reţele P/T.

Pentru început, vom vedea cum putem calcula gradul de concurenţă la o marcare (relativ la un subset de tranziţii) a reţelelor P/T.

Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T, fie $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii, şi fie M o marcare arbitrară a reţelei Σ. Mai mult, presupunem că

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\} \text{ şi } T' = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subseteq T\,.$$

Conform observaţiei 5.1.4, dacă există o tranziţie $t \in T'$ astfel încât $t^- = 0$, atunci $d(\Sigma, T', M) = \infty$, iar în caz contrar, este uşor de observat că:

$$\begin{aligned} d(\Sigma, T', M) &= \max\{\ |Y|\ \mid Y \in \mathbb{Y}|_{T'}(\Sigma, M)\} = \\ &= \max\left\{ \sum_{1 \le i \le n} Y(t_i) \;\middle|\; \sum_{1 \le i \le n} Y(t_i) \cdot t_i^- \le M \right\} = \\ = \max&\left\{ \sum_{1 \le i \le n} Y(t_i) \;\middle|\; \sum_{1 \le i \le n} Y(t_i) \cdot t_i^-(s_j) \le M(s_j)\,, \forall\, 1 \le j \le k \right\}. \end{aligned}$$

Aşadar, calculul gradului de concurenţă relativ la T' la o marcare, $d(\Sigma, T', M)$, se reduce la rezolvarea următoarei probleme de programare liniară întreagă:

$$(P_{\Sigma,T',M}) \quad \begin{cases} \max \sum\limits_{1 \le i \le n} x_i \\ \\ \sum\limits_{1 \le i \le n} W(s_j, t_i) \cdot x_i \le M(s_j), \quad \forall\, 1 \le j \le k \\ \\ x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5.6}$$

x_i fiind variabilele problemei, iar întregii nenegativi $W(s_j, t_i)\Big(= t_i^-(s_j)\Big)$, reprezentând ponderile reţelei Σ, sunt coeficienţii variabilelor în restricţiile liniare.

Prin urmare, avem că:

Teorema 5.1.1 *Gradul de concurenţă la o marcare relativ la un subset de tranziţii, $d(\Sigma, T', M)$, este calculabil pentru orice PTN Σ, orice subset de tranziţii T', şi orice marcare M.*

În particular, pentru $T' = T$, obţinem drept consecinţă:

Corolarul 5.1.1 *Gradul de concurenţă la o marcare, $d(\Sigma, M)$, este calculabil pentru orice PTN Σ şi orice marcare M.*

În continuare, voi prezenta metoda de calcul a gradului superior de concurenţă (relativ la un subset de tranziţii) a unei reţele P/T marcate.

În capitolul 3, subsecţiunea 3.3.1, am arătat cum se poate calcula maximul unei funcţii monotone pe mulţimea de accesibilitate a unei reţele Petri P/T, utilizînd structuri de acoperire finite ale acesteia.

Ca urmare, avem rezultatul:

Teorema 5.1.2 *Gradul superior de concurenţă relativ la un subset de tranziţii, $d^+(\gamma, T')$, este calculabil pentru orice mPTN γ şi orice subset de tranziţii T'.*

Demonstraţie. Vom aplica corolarul 3.3.1 din capitolul 3, pentru funcţia f aleasă ca fiind gradul de concurenţă la o marcare relativ la un subset de tranziţii a unei reţele marcate $\gamma = (\Sigma, M_0)$, i.e. $f : \mathbb{N}^S \to \mathbb{N}$, definită prin

$$f(M) = d(\Sigma, T', M)\,, \forall\, M \in \mathbb{N}^S\,,$$

care este funcţie monoton crescătoare (fapt ce rezultă imediat de la definiţiile gradelor de concurenţă, a se vedea observaţia 5.1.5).

Mai trebuie să verificăm că sunt îndeplinite ipotezele acestui corolar, cu alte cuvinte să arătăm că funcţia $\overline{f}$ este calculabilă (unde $\overline{f} : \mathbb{N}_\omega^S \to \mathbb{N}_\omega$ este extensia "prin continuitate" a funcţiei f, a se vedea definiţia 3.3.1).

Într-adevăr, conform teoremei 5.1.1, f este calculabilă şi, în plus, să mai observăm că, dacă $M \in \mathbb{N}_\omega^S - \mathbb{N}^S$ este o pseudo-marcare, atunci valoarea $\overline{f}(M)$ este soluţia următoarei probleme de programare liniară întreagă:

$$(\overline{P}_{\Sigma,T',M}) \quad \begin{cases} \max \sum\limits_{1\le i\le n} x_i \\ \\ \sum\limits_{1\le i\le n} W(s_j, t_i)\cdot x_i \le M(s_j)\ ,\ \forall\, 1\le j\le k : M(s_j) \neq \omega \\ \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{5.7}$$

lucru care se poate verifica cu uşurinţă pe baza definiţiei extensiei $\overline{f}$.

Observaţie: $(\overline{P}_{\Sigma,T',M})$ este problema $(P_{\Sigma,T',M})$ definită de (5.6), avînd restricţiile liniare corespunzătoare ω-componentelor ignorate, deoarece acestea sunt satisfăcute (ω joacă rolul de "$+\infty$").

Prin urmare, aplicînd corolarul 3.3.1 din capitolul 3, rezultă că gradul superior de concurenţă relativ la T' a reţelei γ poate fi calculat astfel:

$$d^+(\gamma, T') = \max\{\ d(\Sigma, T', M) \mid M \in MCS(\gamma)\}\ , \tag{5.8}$$

unde $MCS(\gamma)$ este mulţimea de acoperire minimală a reţelei γ. $\square$

În particular, pentru $T' = T$, obţinem drept consecinţă:

Corolarul 5.1.2 *Gradul superior de concurenţă $d^+(\gamma)$ este calculabil pentru orice mPTN γ.*

În final, voi arăta cum poate fi calculat gradul inferior de concurenţă (relativ la un subset de tranziţii) a unei reţele P/T marcate.

Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o *mPTN*, şi $T' \subseteq T$ un subset de tranziţii. Este uşor de remarcat faptul că, deşi mulţimea de accesibilitate $[M_0\rangle_\gamma$ poate fi finită (în cazul reţelelor mărginite) sau infinită (în cazul reţelelor nemărginite), în ambele situaţii există o submulţime finită a acesteia, $\mathcal{M} \subseteq [M_0\rangle_\gamma$, cu proprietatea că

$$\forall\, M \in [M_0\rangle_\gamma, \exists\, M' \in \mathcal{M} \text{ astfel încât } M' \leq M\ . \tag{5.9}$$

Într-adevăr, $\mathcal{M}$ poate fi aleasă ca fiind mulţimea elementelor minimale (în raport cu ordinea parţială uzuală din $\mathbb{N}^S$) ale mulţimii de accesibilitate $[M_0\rangle_\gamma$:

$$\mathcal{M} = minimal([M_0\rangle_\gamma) = \{M \in [M_0\rangle_\gamma \mid \forall\, M' \in [M_0\rangle_\gamma : M' \not< M\}\ .$$

Propoziţia 5.1.1 *Are loc următoarea egalitate:*

$$\min\ \{\ d(\Sigma, T', M) \mid M \in [M_0\rangle_\gamma\}\ =\ \min\ \{\ d(\Sigma, T', M) \mid M \in \mathcal{M}\}\ . \tag{5.10}$$

Demonstraţie. Această egalitate rezultă imediat pe baza proprietăţii (5.9) satisfăcute de mulţimea $\mathcal{M}$, folosind faptul că gradul de concurenţă la o marcare relativ la un subset de tranziţii este o funcţie monoton crescătoare în raport cu marcarea, i.e. $M_1 \leq M_2 \Rightarrow d(\Sigma, T', M_1) \leq d(\Sigma, T', M_2)$ (a se vedea observaţia 5.1.5). $\square$

Ca urmare, avem rezultatul:

Teorema 5.1.3 *Gradul inferior de concurenţă relativ la un subset de tranziţii, $d^-(\gamma, T')$, este calculabil pentru orice mPTN γ şi orice subset de tranziţii T'.*

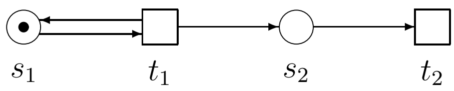


Figura 5.3: Reţeaua P/T din exemplul 5.1.4

Demonstraţie. De la propoziţia 5.1.1 şi definiţia gradului inferior de concurenţă relativ la un subset de tranziţii avem

$$d^-(\gamma, T') \;=\; \min\;\{\; d(\Sigma, T', M) \mid M \in \mathcal{M}\}\;. \tag{5.11}$$

Conform lemei lui Dickson ([18]), orice submulţime din $\mathbb{N}^k$ conţine doar un număr finit de vectori incomparabili. Rezultă că mulţimea $\mathcal{M}$ definită mai sus este finită, deoarece, prin modul de definire al acesteia, elementele mulţimii $\mathcal{M}$ sunt incomparabile. Mai mult, ea este şi calculabilă (demonstraţia acestei afirmaţii poate fi găsită în anexa E de la sfîrşitul acestei lucrări).

Prin urmare, deoarece mulţimea $\mathcal{M}$ este finită şi calculabilă, iar gradul de concurenţă $d(\Sigma, T', M)$ este calculabil pentru orice marcare M (conform teoremei 5.1.1), din egalitatea (5.11) rezultă concluzia acestei teoreme. □

În particular, pentru $T' = T$, obţinem drept consecinţă următorul:

Corolarul 5.1.3 *Gradul inferior de concurenţă $d^-(\gamma)$ este calculabil pentru orice mPTN γ.*

Exemplul 5.1.4 *Pentru reţeaua P/T marcată $\gamma = (\Sigma, M_0)$ reprezentată în figura 5.3, se poate observa cu uşurinţă că mulţimea ei de accesibilitate este $[M_0\rangle_\gamma = \{M_k | k \in \mathbb{N}\}$, unde $M_k = (1, k)$ este marcarea accesibilă produsă de secvenţa de tranziţie t_1^k, pentru fiecare $k \geq 0$.*

Graful de acoperire minimal al reţelei γ este ilustrat în figura 5.4 şi, prin urmare, mulţimea de acoperire minimală a reţelei γ este $MCS(\gamma) = \{(1, \omega)\}$.

Gradele de concurenţă $d(\Sigma, M_k)$, cu $k \geq 0$, şi $d(\Sigma, (1, \omega))$ pot fi calculate rezolvînd problemele de programare liniară întreagă:

$$(P_{\Sigma,\{t_1,t_2\},M_k})\quad \begin{cases} \max\; x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq k \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şi respectiv

$$(\overline{P}_{\Sigma,\{t_1,t_2\},(1,\omega)})\quad \begin{cases} \max\; x_1 + x_2 \\ x_1 \leq 1 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$\mathcal{MCG}(\gamma)$:

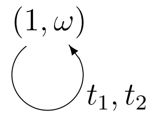


Figura 5.4: Graful de acoperire minimal al reţelei din figura 5.3

care au ca soluţii:

$$d(\Sigma, M_k) = k + 1\,,\ \forall\, k \geq 0\,,$$

şi respectiv

$$d(\Sigma, (1, \omega)) = \infty\,.$$

Aceste rezultate se verifică cu uşurinţă pe baza definiţiei 5.1.3, întrucît mulţimile de paşi maximali posibili la marcările M_k *sunt*

$$\mathbb{Y}_{max}(\Sigma, M_k) = \{t_1 + k`t_2\}\,, \forall\, k \geq 0\,,$$

şi, în plus, pentru pseudo-marcarea $(1, \omega)$ *avem*

$$\mathbb{Y}(\Sigma, (1, \omega)) = \{t_1 + i`t_2 \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{i`t_2 \mid i \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset\,,$$

iar $d(\Sigma, (1, \omega)) = \lim_{k\to\infty} d(\Sigma, M_k) = +\infty$*, conform definiţiei extensiei prin continuitate a unei funcţii (a se vedea definiţia 3.3.1).*

Pe baza teoremelor anterioare, gradele superior şi inferior de concurenţă a reţelei γ *pot fi calculate astfel:*

$$d^+(\gamma) = \max\{\ d(\Sigma, M) \mid M \in MCS(\gamma)\} = \max\{\ d(\Sigma, (1, \omega))\ \} = \infty\ \ ,$$

şi respectiv:

$$d^-(\gamma) = \min\ \{\ d(\Sigma, M) \mid M \in minimal([M_0\rangle_\gamma)\} = d(\Sigma, M_0) = 1\ \ ,$$

deoarece în acest caz $minimal([M_0\rangle_\gamma) = \{M_0\}$*. Aceste rezultate se verifică cu uşurinţă pe baza definiţiei 5.1.4.*

Să mai remarcăm faptul că, pe baza vechilor definiţii ale gradelor de concurenţă din [49] care nu iau în considerare auto-concurenţa, gradul inferior de concurenţă a reţelei γ *ar fi fost* 1*, iar gradul superior de concurenţă a reţelei* γ *ar fi fost* 2*, care nu sunt valori surprinzătoare dacă ignorăm faptul că tranziţia* t_2 *poate fi concurent posibilă cu ea însăşi.*

De asemenea, să mai remarcăm faptul că gradul de concurenţă relativ la tranziţia t_1 *a reţelei* γ *este* $d(\gamma, \{t_1\}) = 1$*, iar gradele inferior şi superior de concurenţă relativ la tranziţia* t_2 *a reţelei* γ *sunt* $d^-(\gamma, \{t_2\}) = 0$ *şi respectiv* $d^+(\gamma, \{t_2\}) = \infty$.

5.1.3 Analiza modulară a concurenţei

Gradele de concurenţă relativ la anumite submulţimi de tranziţii, definite pentru reţele P/T în subsecţiunea 5.1.1, prezintă importanţă practică, spre exemplu, în analiza modulară a reţelelor Petri ([14]). Mai precis, pentru varianta de modularizare ce foloseşte *locaţii partajate*, utilizate pentru a modela resurse partajate (mai există şi varianta cu *tranziţii partajate*, utilizate pentru a modela acţiuni sincronizate – vezi detalii în [14]).

Astfel, o reţea Petri se poate "descompune" în mai multe module, i.e. subreţele ale sale, ce au în comun anumite locaţii, care au rol de "interfaţă" (i.e., sunt *partajate*) între două sau mai multe module. Şi atunci studiul concurenţei în reţeaua globală se poate face analizînd concurenţa subreţelelor din care este formată.

Prin urmare, ar fi util de studiat legătura dintre gradele de concurenţă a reţelei globale şi gradele de concurenţă ale subreţelelor componente ale acesteia.

Rezultatul următor exprimă legătura existentă între gradul de concurenţă relativ la reuniunea a două submulţimi disjuncte de tranziţii şi gradele de concurenţă relativ la fiecare dintre cele două submulţimi:

Teorema 5.1.4 *i) Fie Σ o P/T-reţea, $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii, şi M o marcare arbitrară a lui Σ. Atunci are loc inegalitatea:*

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \leq d(\Sigma, T_1, M) + d(\Sigma, T_2, M) \ . \tag{5.12}$$

ii) Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o P/T-reţea marcată, şi $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii. Referitor la gradul superior de concurenţă are loc următoarea inegalitate:

$$d^+(\gamma, T_1 \cup T_2) \leq d^+(\gamma, T_1) + d^+(\gamma, T_2) \ . \tag{5.13}$$

Demonstraţie. i) Fie Σ o reţea P/T, $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii, şi M o marcare arbitrară a lui Σ.

Fie $Y \in \mathbb{Y}|_{T_1 \cup T_2}(\Sigma, M)$ un $(T_1 \cup T_2)$-pas arbitrar posibil la marcarea M în Σ. Atunci, conform regulii de aplicabilitate a unui pas, şi deoarece prin ipoteză $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, avem că

$$M \geq \sum_{t \in T_1 \cup T_2} Y(t) \cdot t^- = \sum_{t \in T_1} Y(t) \cdot t^- + \sum_{t \in T_2} Y(t) \cdot t^- \, ,$$

de unde rezultă că

$$\sum_{t \in T_1} Y(t) \cdot t^- \leq M \quad \text{şi} \quad \sum_{t \in T_2} Y(t) \cdot t^- \leq M \, .$$

Prima inegalitate ne spune că pasul notat cu $Y|_{T_1} = \sum_{t\in T_1} Y(t)`t$ este un T_1-pas posibil la M în Σ, i.e. $Y|_{T_1} \in \mathbb{Y}|_{T_1}(\Sigma, M)$. Conform definiţiei 5.1.6, aceasta înseamnă că $|Y|_{T_1}| \leq d(\Sigma, T_1, M)$.

Similar, din a doua inegalitate de mai sus deducem că pasul notat cu $Y|_{T_2} = \sum_{t\in T_2} Y(t)`t$ este un T_2-pas posibil la M în Σ, i.e. $Y|_{T_2} \in \mathbb{Y}|_{T_2}(\Sigma, M)$ şi ca urmare $|Y|_{T_2}| \leq d(\Sigma, T_2, M)$.

Deoarece $Y = Y|_{T_1} + Y|_{T_2}$, rezultă că

$$|Y| = |Y|_{T_1}| + |Y|_{T_2}| \leq d(\Sigma, T_1, M) + d(\Sigma, T_2, M) .$$

Prin urmare, am arătat că

$$|Y| \leq d(\Sigma, T_1, M) + d(\Sigma, T_2, M) \ , \ \forall Y \in \mathbb{Y}|_{T_1\cup T_2}(\Sigma, M) \ .$$

Trecînd la suprem după $Y \in \mathbb{Y}|_{T_1\cup T_2}(\Sigma, M)$ în inegalitatea anterioară, şi utilizînd definiţia 5.1.6, obţinem inegalitatea dorită:

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \leq d(\Sigma, T_1, M) + d(\Sigma, T_2, M) \ .$$

ii) Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată, şi $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii ale lui Σ.

Conform definiţiei gradului superior de concurenţă relativ la un set de tranziţii (definiţia 5.1.7), avem inegalităţile

$$d(\Sigma, T_1, M) \leq d^+(\gamma, T_1) \quad \text{şi} \quad d(\Sigma, T_2, M) \leq d^+(\gamma, T_2) ,$$

pentru orice marcare accesibilă a reţelei γ.

Prin urmare, deoarece, conform pct. i), inegalitatea (5.12) este valabilă pentru orice marcare arbitrară M a lui Σ, şi deci, în particular, pentru cele accesibile, rezultă că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \leq d^+(\gamma, T_1) + d^+(\gamma, T_2) \ , \ \forall M \in [M_0\rangle_\gamma .$$

Trecînd la suprem după $M \in [M_0\rangle_\gamma$ în inegalitatea anterioară, şi utilizînd definiţia 5.1.7, obţinem inegalitatea dorită:

$$d^+(\gamma, T_1 \cup T_2) \leq d^+(\gamma, T_1) + d^+(\gamma, T_2) \ ,$$

ceea ce încheie demonstraţia acestei teoreme. □

Observaţia 5.1.7 *Din păcate, referitor la gradul inferior de concurenţă nu are loc o inegalitate asemănătoare cu* (5.13)*, şi nici una cu semn schimbat, observaţie ce este justificată de următorul contraexemplu.*

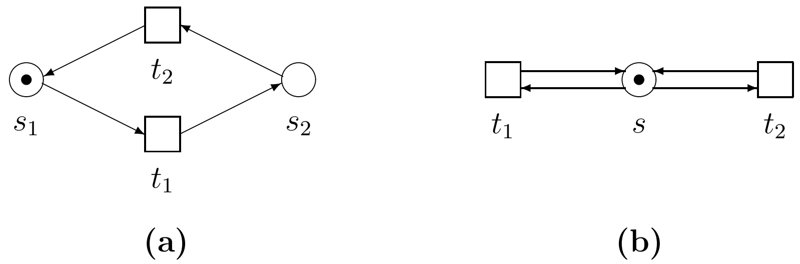


Figura 5.5: Reţelele P/T din exemplul 5.1.5

Exemplul 5.1.5 *Pentru reţeaua P/T marcată* $\gamma_1 = (\Sigma_1, M_0)$ *reprezentată în figura 5.5 (a), se poate observa cu uşurinţă că mulţimea de accesibilitate este* $[M_0\rangle_{\gamma_1} = \{M_0, M_1\}$*, unde* $M_0 = (1,0)$ *şi* $M_1 = (0,1)$*, iar mulţimile de paşi posibili la marcările accesibile ale reţelei* γ_1 *sunt* $\mathbb{Y}(\Sigma_1, M_0) = \{t_1\}$ *şi respectiv* $\mathbb{Y}(\Sigma_1, M_1) = \{t_2\}$*. Prin urmare, gradele inferioare sunt* $d^-(\gamma_1, \{t_1\}) = 0$*,* $d^-(\gamma_1, \{t_2\}) = 0$*, şi* $d^-(\gamma_1, \{t_1, t_2\}) = 1$*.*

Deci în acest caz avem o inegalitate de forma:

$$d^-(\gamma, \{t_1, t_2\}) > d^-(\gamma, \{t_1\}) + d^-(\gamma, \{t_2\}) \ .$$

Să considerăm acum reţeaua P/T marcată $\gamma_2 = (\Sigma_2, M_0)$ *reprezentată în figura 5.5 (b). Pentru această reţea, se constată că mulţimea de accesibilitate este* $[M_0\rangle_{\gamma_2} = \{M_0\}$*, unde* $M_0 = (1)$*, iar mulţimea de paşi posibili la marcarea accesibilă a reţelei* γ_2 *este* $\mathbb{Y}(\Sigma_2, M_0) = \{t_1, t_2\}$*. Prin urmare, gradele inferioare sunt* $d^-(\gamma_2, \{t_1\}) = 1$*,* $d^-(\gamma_2, \{t_2\}) = 1$*, şi* $d^-(\gamma_2, \{t_1, t_2\}) = 1$*.*

Deci în acest caz avem o inegalitate de forma:

$$d^-(\gamma, \{t_1, t_2\}) < d^-(\gamma, \{t_1\}) + d^-(\gamma, \{t_2\}) \ .$$

Mai mult, există şi situaţii cînd avem egalitate, ilustrativ în acest sens fiind exemplul următor.

Exemplul 5.1.6 *Să continuăm exemplul 5.1.2. Pentru reţeaua* $\gamma = (\Sigma, M_0)$ *din acel exemplu, am văzut deja care sunt gradele de concurenţă relativ la tranziţia* t_1*, relativ la tranziţia* t_2*, şi respectiv relativ la tranziţia* t_3*, precum şi relativ la submulţimea de tranziţii* $\{t_1, t_2\}$ *şi respectiv relativ la* $\{t_1, t_3\}$ *(în exemplul 5.1.3).*

Ca atare, pe baza acelui exemplu, se poate remarca faptul că avem $d(\Sigma, \{t_1, t_2\}, M_k) = 2 < 2 + 1 = d(\Sigma, \{t_1\}, M_k) + d(\Sigma, \{t_2\}, M_k)$ *, pentru toate marcările* M_k*,* $k \geq 0$*, deci* (5.12) *este o inegalitate strictă în acest caz.*

De asemenea, se verifică uşor faptul că, pentru toate marcările M'_k*,* $k \geq 1$*, avem* $d(\Sigma, \{t_1, t_3\}, M'_k) = 2 = 1 + 1 = d(\Sigma, \{t_1\}, M'_k) + d(\Sigma, \{t_3\}, M'_k)$ *, prin urmare* (5.12) *este o egalitate în acest caz.*

Referitor la gradul superior de concurenţă, avem relativ la $\{t_1, t_2\}$ *că* $d^+(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 2 < 2 + 1 = d^+(\gamma, \{t_1\}) + d^+(\gamma, \{t_2\})$, *precum şi o inegalitate similară relativ la* $\{t_1, t_3\}$, *ceea ce înseamnă că* (5.13) *este o inegalitate strictă în acest caz.*

Însă există şi alte situaţii, nu în acest exemplu, în care (5.13) *este o egalitate. Astfel, de pildă, pentru reţeaua pe care am văzut-o în exemplul 5.1.4, aveam că* $d^+(\gamma, \{t_1, t_2\}) = d^+(\gamma) = \infty = 1 + \infty = d^+(\gamma, \{t_1\}) + d^+(\gamma, \{t_2\})$.

Referitor la gradul inferior de concurenţă, tot pentru acest exemplu, avem egalitatea $d^-(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 1 = 1 + 0 = d^-(\gamma, \{t_1\}) + d^-(\gamma, \{t_2\})$.

În general însă, după cum am arătat mai sus în exemplul 5.1.5, pentru gradul inferior de concurenţă nu are loc o inegalitate analoagă cu (5.13), *şi nici una cu semn schimbat.*

În ciuda observaţiei 5.1.7, care ne spune că pentru gradul inferior de concurenţă nu există o limită superioară asemănătoare cu cele existente pentru gradul de concurenţă la o marcare şi respectiv gradul superior de concurenţă, putem totuşi specifica o limită inferioară pentru gradul inferior de concurenţă, şi anume:

Teorema 5.1.5 *Fie* $\gamma = (\Sigma, M_0)$ *o P/T-reţea marcată, şi* $T_1, T_2 \subseteq T$ *două submulţimi disjuncte de tranziţii. Atunci are loc următoarea inegalitate:*

$$d^-(\gamma, T_1 \cup T_2) \geq \max\{d^-(\gamma, T_1)\, ,\, d^-(\gamma, T_2)\} \ . \tag{5.14}$$

Demonstraţie. Fie $M \in \mathbb{N}^S$ o marcare arbitrară a reţelei Σ. Are loc incluziunea $\mathbb{Y}|_{T_1}(\Sigma, M) \subseteq \mathbb{Y}|_{T_1 \cup T_2}(\Sigma, M)$, justificată de faptul că orice multiset peste mulţimea T_1 este şi multiset peste mulţimea $T_1 \cup T_2$ (avînd multiplicităţi zero pentru elementele din T_2). Ca atare deducem că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \geq d(\Sigma, T_1, M)\, ,$$

pentru orice marcare arbitrară M, deci în particular şi pentru $M \in [M_0\rangle_\gamma$.

Pe de altă parte însă, conform definiţiei gradului inferior de concurenţă,

$$d(\Sigma, T_1, M) \geq d^-(\gamma, T_1)\, ,$$

pentru orice marcare accesibilă $M \in [M_0\rangle_\gamma$. Prin urmare, rezultă că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \geq d^-(\gamma, T_1)\, , \forall\, M \in [M_0\rangle_\gamma\, .$$

Similar se arată că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \geq d^-(\gamma, T_2)\, , \forall\, M \in [M_0\rangle_\gamma\, .$$

Din ultimele două inegalităţi deducem că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \geq \max\{d^-(\gamma, T_1)\,,\, d^-(\gamma, T_2)\}\,, \forall\, M \in [M_0\rangle_\gamma\,.$$

Trecînd la minim după $M \in [M_0\rangle_\gamma$ în inegalitatea anterioară, şi utilizînd definiţia 5.1.7, obţinem inegalitatea dorită:

$$d^-(\gamma, T_1 \cup T_2) \geq \max\{d^-(\gamma, T_1)\,,\, d^-(\gamma, T_2)\}\ ,$$

ceea ce încheie demonstraţia acestei teoreme. $\square$

Observaţia 5.1.8 *În mod evident, inegalităţile* (5.12) *şi* (5.13) *din teorema 5.1.4, precum şi inegalitatea* (5.14) *din teorema 5.1.5, au loc şi în forma generalizată pentru orice reuniune finită de submulţimi de tranziţii disjuncte două cîte două. (Această afirmaţie se demonstrează imediat prin aplicarea repetitivă a inegalităţilor amintite pentru reuniune de două submulţimi disjuncte de tranziţii.)*

Un caz particular al acestor inegalităţi generalizate îl constituie cazul cînd submulţimile au cîte un singur element, obţinîndu-se astfel următorul rezultat, ce exprimă legătura existentă între gradul de concurenţă relativ la o submulţime de tranziţii şi gradele de concurenţă relativ la fiecare tranziţie individuală din acea submulţime:

Corolarul 5.1.4 *i) Fie Σ o P/T-reţea, $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii, şi M o marcare arbitrară a lui Σ. Atunci are loc următoarea inegalitate:*

$$d(\Sigma, T', M) \leq \sum_{t \in T'} d(\Sigma, \{t\}, M)\ . \tag{5.15}$$

ii) Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o P/T-reţea marcată, şi $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii. Atunci au loc următoarele inegalităţi:

$$d^+(\gamma, T') \leq \sum_{t \in T'} d^+(\gamma, \{t\})\ , \tag{5.16}$$

şi respectiv

$$d^-(\gamma, T') \geq \max_{t \in T'} d^-(\gamma, \{t\})\ . \tag{5.17}$$

Demonstraţie. Inegalităţile din acest corolar rezultă ca o simplă consecinţă a teoremelor 5.1.4 şi 5.1.5, prin aplicarea repetată (de $|T'| - 1$ ori) a inegalităţilor corespunzătoare din acele teoreme. $\square$

Ca urmare a exemplului 5.1.6 de mai înainte, apare o întrebare interesantă, şi anume: cînd au loc cu egalitate inegalităţile (5.12), (5.13) şi (5.14), sau analoaga inegalităţii (5.13) pentru gradul inferior?

Să observăm faptul că, dacă Σ este o P/T-reţea, $T' \subseteq T$ este o submulţime de tranziţii, iar M_1, M_2 sunt două marcări oarecare ale reţelei Σ cu proprietatea că $M_1(s) = M_2(s)$, pentru orice locaţie $s \in {}^\bullet T'$, atunci rezultă că $\mathbb{Y}|_{T'}(\Sigma, M_1) = \mathbb{Y}|_{T'}(\Sigma, M_2)$, şi prin urmare $d(\Sigma, T', M_1) = d(\Sigma, T', M_2)$.

Cu alte cuvinte, gradul de concurenţă la o marcare relativ la o submulţime de tranziţii depinde *numai* de componentele acelei marcări corespunzătoare pre-locaţiilor tranziţiilor din acea submulţime.

Această observaţie justifică următorul rezultat, care exprimă o proprietate *structurală* a reţelei ce este o condiţie suficientă pentru a avea loc o parte din egalităţile amintite mai sus.

Teorema 5.1.6 *Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T şi $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii. Dacă Σ satisface proprietatea că ${}^\bullet T_1 \cap {}^\bullet T_2 = \emptyset$ (adică, cu alte cuvinte, pentru orice pereche de tranziţii $t_1 \in T_1$ şi $t_2 \in T_2$, t_1 şi t_2 nu au pre-locaţii comune, i.e. ele sunt "independente" una de alta), atunci are loc următoarea egalitate:*

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) = d(\Sigma, T_1, M) + d(\Sigma, T_2, M) \ , \tag{5.18}$$

pentru orice marcare M a reţelei Σ.

În plus, dacă considerăm şi o marcare iniţială pentru P/T-reţeaua Σ, i.e. fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ cu Σ ca mai sus, atunci are loc următoarea inegalitate referitor la gradul inferior de concurenţă:

$$d^-(\gamma, T_1 \cup T_2) \geq d^-(\gamma, T_1) + d^-(\gamma, T_2) \ . \tag{5.19}$$

Demonstraţie. Ţinînd cont de inegalitatea (5.12) din teorema 5.1.4, pentru a demonstra egalitatea (5.18) este suficient să arătăm că are loc inegalitatea (5.12) cu semn schimbat în ipoteza ${}^\bullet T_1 \cap {}^\bullet T_2 = \emptyset$ satisfăcută de reţeaua Σ.

Fie $Y_1 \in \mathbb{Y}|_{T_1}(\Sigma, M)$ un T_1-pas arbitrar posibil la marcarea M în Σ, şi fie $Y_2 \in \mathbb{Y}|_{T_2}(\Sigma, M)$ un T_2-pas arbitrar posibil la marcarea M în Σ.

Atunci, conform regulii de aplicabilitate a unui pas, avem că

$$Y_1^-(s) \overset{not}{=} \sum_{t \in T_1} Y(t) \cdot t^-(s) \leq M(s) \, , \forall \, s \in S \, ,$$

şi respectiv

$$Y_2^-(s) \overset{not}{=} \sum_{t \in T_2} Y(t) \cdot t^-(s) \leq M(s) \, , \forall \, s \in S \, .$$

Fie $Y = Y_1 + Y_2$, deci Y este un $(T_1 \cup T_2)$-pas. Atunci

$$Y^-(s) \stackrel{not}{=} \sum_{t \in T_1 \cup T_2} Y(t) \cdot t^-(s) = Y_1^-(s) + Y_2^-(s)\,, \forall\, s \in S\,.$$

Ţinînd cont de faptul că $t^-(s) = 0$ dacă şi numai dacă $s \notin {}^\bullet t$, pentru orice $t \in T$ şi $s \in S$, şi deoarece prin ipoteză ${}^\bullet T_1 \cap {}^\bullet T_2 = \emptyset$, rezultă că oricare ar fi locaţia $s \in S$, unul din următoarele trei cazuri este posibil:

1. $s \in {}^\bullet T_1$. Atunci $s \notin {}^\bullet T_2$ şi prin urmare $Y_2^-(s) = 0$, deci obţinem că $Y^-(s) = Y_1^-(s) \le M(s)$.

2. $s \in {}^\bullet T_2$. Atunci $s \notin {}^\bullet T_1$ şi prin urmare $Y_1^-(s) = 0$, deci obţinem că $Y^-(s) = Y_2^-(s) \le M(s)$.

3. $s \in S - ({}^\bullet T_1 \cup {}^\bullet T_2)$. Atunci $s \notin {}^\bullet T_1$ şi $s \notin {}^\bullet T_2$, prin urmare $Y_1^-(s) = Y_2^-(s) = 0$, deci obţinem că $Y^-(s) = 0 \le M(s)$.

Prin urmare am arătat că $Y^-(s) \le M(s)$, pentru orice $s \in S$, inegalitate care ne spune că pasul Y este un $(T_1 \cup T_2)$-pas posibil la M în Σ, i.e. $Y \in \mathbb{Y}|_{T_1 \cup T_2}(\Sigma, M)$.

Rezultă că $|Y| \le d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M)$, pe baza definiţiei 5.1.6. Dar, deoarece $Y = Y_1 + Y_2$, obţinem că $|Y_1| + |Y_2| = |Y| \le d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M)$.

Ca urmare, am arătat că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \ge |Y_1| + |Y_2|\ ,$$

pentru orice $Y_1 \in \mathbb{Y}|_{T_1}(\Sigma, M)$ şi orice $Y_2 \in \mathbb{Y}|_{T_2}(\Sigma, M)$.

Prin trecere succesivă, în inegalitatea anterioară, la suprem după $Y_1 \in \mathbb{Y}|_{T_1}(\Sigma, M)$, şi apoi la suprem după $Y_2 \in \mathbb{Y}|_{T_2}(\Sigma, M)$, şi utilizînd definiţia 5.1.6, se obţine inegalitatea dorită:

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \ge d(\Sigma, T_1, M) + d(\Sigma, T_2, M)\ .$$

Pentru a demonstra a doua parte a acestei teoreme, fie $M \in [M_0\rangle_\gamma$ o marcare accesibilă arbitrară. Atunci, conform definiţiei gradului inferior de concurenţă, avem că

$$d(\Sigma, T_1, M) \ge d^-(\gamma, T_1) \ \text{ şi } \ d(\Sigma, T_2, M) \ge d^-(\gamma, T_2)\,,$$

şi deci, aplicînd prima parte a acestei teoreme, obţinem că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) = d(\Sigma, T_1, M) + d(\Sigma, T_2, M) \ge d^-(\gamma, T_1) + d^-(\gamma, T_2)\,.$$

Prin urmare, am arătat că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M) \geq d^-(\gamma, T_1) + d^-(\gamma, T_2)\,, \forall\, M \in [M_0\rangle_\gamma \ .$$

Trecînd la minim după $M \in [M_0\rangle_\gamma$ în inegalitatea anterioară, şi utilizînd definiţia 5.1.7, obţinem inegalitatea dorită:

$$d^-(\gamma, T_1 \cup T_2) \geq d^-(\gamma, T_1) + d^-(\gamma, T_2) \ ,$$

ceea ce încheie demonstraţia acestei teoreme. □

Observaţia 5.1.9 *În mod evident, egalitatea* (5.18) *şi inegalitatea* (5.19) *din teorema 5.1.6 au loc şi în forma generalizată pentru orice reuniune finită de submulţimi de tranziţii disjuncte două cîte două. (Această afirmaţie se demonstrează imediat prin aplicarea repetitivă a relaţiilor amintite pentru reuniune de două submulţimi disjuncte de tranziţii.)*

Un caz particular al acestor relaţii generalizate îl constituie cazul cînd submulţimile au cîte un singur element, obţinîndu-se astfel următorul rezultat, ce exprimă o condiţie suficientă pentru a avea relaţiile amintite mai sus între gradul de concurenţă relativ la o submulţime de tranziţii şi gradele de concurenţă relativ la fiecare tranziţie individuală din acea submulţime:

Corolarul 5.1.5 *Fie $\Sigma = (S, T, F, W)$ o reţea P/T şi $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii. Dacă Σ satisface proprietatea că ${}^\bullet t_1 \cap {}^\bullet t_2 = \emptyset$, pentru orice $t_1, t_2 \in T'$ (adică, cu alte cuvinte, orice pereche de tranziţii $t_1, t_2 \in T'$ nu au pre-locaţii comune, i.e. t_1 şi t_2 sunt "independente" una de alta), atunci are loc următoarea egalitate:*

$$d(\Sigma, T', M) = \sum_{t \in T'} d(\Sigma, \{t\}, M) \ , \tag{5.20}$$

pentru orice marcare M a reţelei Σ.

În plus, dacă considerăm şi o marcare iniţială pentru P/T-reţeaua Σ, i.e. fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ cu Σ ca mai sus, atunci are loc următoarea inegalitate referitor la gradul inferior de concurenţă:

$$d^-(\gamma, T') \geq \sum_{t \in T'} d^-(\gamma, \{t\}) \ . \tag{5.21}$$

Demonstraţie. Relaţiile din acest corolar rezultă ca o simplă consecinţă a teoremei 5.1.6, prin aplicarea repetată (de $|T'| - 1$ ori) a relaţiilor corespunzătoare din acea teoremă. □

Observaţia 5.1.10 *Din nefericire, condiţia* $^\bullet T_1 \cap {}^\bullet T_2 = \emptyset$ *nu este suficientă pentru a avea loc* (5.13) *cu egalitate pentru gradul superior de concurenţă, şi nici pentru egalitatea similară pentru gradul inferior de concurenţă.*

Această afirmaţie este justificată de reţeaua P/T marcată $\gamma_2 = (\Sigma_2, M_0)$ *din figura 5.5 (a), care satisface condiţia* $^\bullet t_1 \cap {}^\bullet t_2 = \emptyset$*, şi pentru care am văzut, în exemplul 5.1.5, că avem*

$$d^-(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 1 > 0 + 0 = d^-(\gamma, \{t_1\}) + d^-(\gamma, \{t_2\}) \ .$$

De asemenea, tot pentru această reţea, referitor la gradul superior avem

$$d^+(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 1 < 1 + 1 = d^+(\gamma, \{t_1\}) + d^+(\gamma, \{t_2\}) \ .$$

Totuşi, inegalitatea (5.19)*, ce este valabilă în ipoteza* $^\bullet T_1 \cap {}^\bullet T_2 = \emptyset$*, reprezintă o îmbunătăţire a limitei inferioare generale date de inegalitatea* (5.14)*, pentru gradul inferior de concurenţă.*

Mai mult, se poate observa că în ipoteza $^\bullet T_1 \cap {}^\bullet T_2 = \emptyset$, pentru ca inegalitatea (5.19) să aibă loc cu egalitate este suficientă următoarea condiţie suplimentară:
Fie $M_1 \in [M_0\rangle_\gamma$, şi respectiv $M_2 \in [M_0\rangle_\gamma$, punctele de minim pentru care se atinge minimul din definiţia gradului inferior de concurenţă, pentru $d^-(\gamma, T_1)$ şi respectiv $d^-(\gamma, T_2)$, atunci există o marcare accesibilă $M_3 \in [M_0\rangle_\gamma$ astfel încât $M_3 \le M_1$ şi $M_3 \le M_2$.
Această condiţie poate fi testată prin inspecţia mulţimii $minimal([M_0\rangle_\gamma)$ a marcărilor accesibile minimale, pe baza căreia am văzut în subsecţiunea precedentă că se pot calcula gradele inferioare de concurenţă relativ la orice submulţime de tranziţii.

Rămîne aşadar o problemă deschisă, pentru cercetări viitoare, şi anume găsirea unor condiţii "*elegante*" în care are loc o egalitate de forma (5.13) pentru gradele superior şi inferior de concurenţă a unei reţele P/T marcate.

5.2 Grade de concurenţă pentru reţele Petri cu salturi

Noţiunea de grade de concurenţă pentru reţele Petri cu salturi a fost introdusă pentru prima dată în lucrarea (Jucan & Vidraşcu [50]), în care am arătat, de asemenea, cum se pot calcula toate cele trei categorii de grade de concurenţă definite (i.e., gradul local la o marcare oarecare, şi gradele globale, inferior şi superior, care iau în calcul gradele locale corespunzătoare tuturor marcărilor accesibile ale reţelei).

Din acelaşi motiv ca şi la reţele P/T, nu voi mai prezenta în această lucrare definiţiile gradelor de concurenţă şi algoritmii de calcul al acestora descrişi în lucrarea [50], deoarece acele definiţii au acelaşi neajuns major: ele iau în considerare numai tranziţii distincte ce se pot produce simultan la o marcare, cu alte cuvinte această variantă iniţială de definire a gradelor de concurenţă pentru reţele cu salturi ignoră *auto-concurenţa*, i.e. cazul unei tranziţii posibile simultan cu ea însăşi la o marcare.

Ca atare, la fel ca la reţele P/T, am introdus o nouă definiţie, mai generală, a noţiunii de grade de concurenţă pentru reţele cu salturi, care ia în considerare şi situaţia tranziţiilor posibile simultan cu ele însele la o marcare.

În plus, am introdus şi o noţiune mai fină, aceea de *grade de concurenţă relativ la un set de tranziţii*, care ignoră anumite tranziţii ale reţelei.

În această secţiune voi prezenta această definiţie mai generală a gradelor de concurenţă, precum şi modul de calcul al acestora, pe baza *rezultatelor originale* publicate în lucrarea (Vidraşcu & Jucan [129]) (o versiune preliminară a acesteia a fost prezentată la conferinţa ICAM 3, [130]).

În plus, în ultima parte a acestei secţiuni am prezentat cîteva rezultate şi observaţii legate de analiza modulară a concurenţei în reţele Petri cu salturi.

5.2.1 Definirea gradelor de concurenţă

Mai întîi, voi defini noţiunea de *pas posibil la o marcare* ca un multiset de tranziţii, în loc de o submulţime de tranziţii, iar apoi voi defini gradele de concurenţă pe baza acestei noţiuni de pas posibil la o marcare. Stilul de prezentare este asemănător cu cel din cazul definiţiei vechi ([50]).

Definiţia 5.2.1 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi, cu $\Sigma = (S, T, F, W)$ P/T-reţeaua suport a ei. Se numeşte* pas Y *al reţelei Σ orice multiset nevid şi finit peste mulţimea tranziţiilor T. Vom nota prin $\mathbb{Y}(\gamma)$ mulţimea tuturor paşilor reţelei γ, adică*

$$\mathbb{Y}(\gamma) = \{Y \in T_{MS} \mid Y \neq \emptyset \wedge |Y| < \infty\}.$$

Definiţia 5.2.2 *Evoluţia concurentă prin paşi a reţelei cu salturi $\gamma = (\Sigma, R)$ este dată de* regula de j-tranziţie într-un pas*, care constă în:*

(RA) regula de j-aplicabilitate *a unui pas:*
Un pas Y este j-posibil *la marcarea M în γ (sau Y se poate* j-produce *la M), şi mai spunem de asemenea că Y este un multiset de tranziţii concurent j-posibile la M, abreviat $M\,[Y\rangle_{\gamma,j}$, dacă şi numai dacă există o marcare M_1 astfel încât $M\,R^*\,M_1\,[Y\rangle_\Sigma$;*

(RC) regula de j-calcul *a unui pas:*
Dacă pasul Y este j-posibil la marcarea M în γ, atunci o marcare M' este j-produsă *prin apariţia pasului Y la marcarea M, abreviat $M\,[Y\rangle_{\gamma,j}\,M'$, dacă şi numai dacă există două marcări M_1, M_2 astfel încât $M\,R^*\,M_1\,[Y\rangle_\Sigma\,M_2\,R^*\,M'$.*

Notaţia 5.2.1 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi şi M o marcare arbitrară a reţelei γ.*
i) $T(\gamma, M)$ denotă mulţimea tuturor tranziţiilor j-posibile la M în γ:

$$T(\gamma, M) = \{t \in T \mid M\,[t\rangle_{\gamma,j}\}\ ;$$

ii) $\mathbb{Y}(\gamma, M)$ denotă mulţimea tuturor paşilor j-posibili la marcarea M în γ, adică mulţimea tuturor multiseturilor de tranziţii concurent j-posibile la M:

$$\mathbb{Y}(\gamma, M) = \{Y \in \mathbb{Y}(\gamma) \mid M\,[Y\rangle_{\gamma,j}\}\ ;$$

iii) $\mathbb{Y}_{max}(\gamma, M)$ denotă mulţimea tuturor paşilor maximali j-posibili la marcarea M în γ:

$$\mathbb{Y}_{max}(\gamma, M) = \{Y \in \mathbb{Y}(\gamma, M) \mid \forall Y' \in \mathbb{Y}(\gamma) : Y' > Y \Rightarrow Y' \notin \mathbb{Y}(\gamma, M)\}\,.$$

Şi în cazul reţelelor cu salturi au loc observaţii similare observaţiilor 5.1.1 şi 5.1.2 din cazul reţelelor P/T, cu singura diferenţă că, în acest caz, din cauza salturilor, condiţia $T_0 = \emptyset$ din observaţia 5.1.2 nu mai garantează faptul că mulţimile $\mathbb{Y}(\gamma, M)$ şi $\mathbb{Y}_{max}(\gamma, M)$ sunt finite, pentru orice marcare arbitrară M a reţelei cu salturi γ. Aceasta deoarece, spre exemplu, putem avea o tranziţie t şi o marcare M cu $M \geq t^-$ (deci t este posibilă la M), şi R să conţină o infinitate de salturi de forma $(M, k \cdot M) \in R$, cu $k \in \mathbb{N}$, şi atunci ar exista o infinitate de paşi j-posibili la M de forma $Y_k = k`t$, cu $k \in \mathbb{N}$, deoarece avem $M\,R\,(k \cdot M)\ [\,k`t\,\rangle_\Sigma$, adică $M\,[Y_k\rangle_{\gamma,j}$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$.

Însă, în cazul particular al reţelelor cu salturi finite, afirmaţiile din observaţia 5.1.2 se păstrează în întregime, i.e. inclusiv faptul că $T_0 = \emptyset$ garantează finititudinea mulţimilor $\mathbb{Y}(\gamma, M)$ şi $\mathbb{Y}_{max}(\gamma, M)$, pentru orice marcare arbitrară M a reţelei cu salturi finite γ.

Definiţia 5.2.3 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi şi M o marcare arbitrară a reţelei γ.* Gradul de concurenţă la marcarea M *a reţelei γ este definit prin:*

$$d(\gamma, M) = \sup\{\ |Y|\ \mid Y \in \mathbb{Y}(\gamma, M)\}\ . \tag{5.22}$$

Observaţia 5.2.1 *Gradul de concurenţă la marcarea M a unei reţele cu salturi γ reprezintă, intuitiv, numărul suprem de tranziţii concurent j-posibile la marcarea M. Cu alte cuvinte, există cel mult $d(\gamma, M)$ tranziţii concurent j-posibile la M.*

Observaţia 5.2.2 *Direct de la definiţie şi analoaga observaţiei 5.1.2 de la reţele P/T, rezultă că, dacă există măcar o tranziţie $t \in T$ a reţelei γ astfel încât ${}^\bullet t = \emptyset$, atunci $d(\gamma, M) = \infty$, pentru orice marcare $M \in \mathbb{N}^S$.*

În caz contrar însă, nu mai rezultă că are loc o egalitate de forma (5.2) *ca la reţele P/T, datorită remarcei făcute mai sus, înainte de definiţia 5.2.3. Mai precis, are loc o egalitate de forma* (5.2) *pentru reţeaua cu salturi γ şi marcarea M numai dacă mulţimea $\mathbb{Y}(\gamma, M)$ este finită (caz în care supremul din definiţia 5.2.3 devine un maxim).*

Următorul rezultat exprimă legătura dintre gradul de concurenţă la o marcare a unei reţele cu salturi şi gradele de concurenţă ale P/T-reţelei suport a sa la marcările "accesibile" prin salturi de la acea marcare.

Propoziţia 5.2.1 *Pentru orice reţea Petri cu salturi $\gamma = (\Sigma, R)$ şi orice marcare arbitrară M a reţelei γ,*

$$d(\gamma, M) = \sup\{\ d(\Sigma, M') \mid M\, R^*\, M'\ \}\ . \tag{5.23}$$

Demonstraţie. Această egalitate rezultă imediat de la definiţiile 5.2.3 şi 5.2.2 de mai sus, şi de la definiţia gradului de concurenţă la o marcare pentru reţele P/T. □

Observaţia 5.2.3 *Gradul de concurenţă la o marcare a unei reţele Petri cu salturi nu este o funcţie monoton crescătoare în raport cu marcarea, i.e.*

$$M_1 \le M_2 \ \not\Rightarrow\ d(\gamma, M_1) \le d(\gamma, M_2)\,,$$

cu toate că pentru reţele P/T avea loc această proprietate.
Justificare*: această remarcă se datorează faptului că pentru reţelele Petri cu salturi regula de j-aplicabilitate a unui pas la o marcare nu are proprietatea de monotonie (spre deosebire de cazul reţelelor P/T), i.e.*

$$M_1[Y\rangle_\gamma \text{ şi } M_1 \le M_2 \ \not\Rightarrow\ M_2[Y\rangle_\gamma\,,$$

pe baza căreia rezultă că $M_1 \le M_2 \ \not\Rightarrow\ \mathbb{Y}(\gamma, M_1) \subseteq \mathbb{Y}(\gamma, M_2)$, de unde, trecînd la suprem conform definiţiei 5.2.3, se obţine afirmaţia de mai sus.

Definiţia 5.2.4 *Fie* $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ *o reţea Petri cu salturi marcată.*
i) Gradul inferior de concurenţă *a reţelei* γ *este definit prin:*

$$d^-(\gamma) = \min\{\ d(\gamma, M) \mid M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}\} \tag{5.24}$$

ii) Gradul superior de concurenţă *a reţelei* γ *este definit prin:*

$$d^+(\gamma) = \sup\{\ d(\gamma, M) \mid M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}\} \tag{5.25}$$

iii) Dacă $d^-(\gamma) = d^+(\gamma)$*, atunci notăm acest număr cu* $d(\gamma)$*, şi îl numim* gradul de concurenţă *a reţelei* γ.

Observaţiile referitoare la înţelesul intuitiv al gradelor de concurenţă a reţelelor P/T se păstrează şi în cazul celor cu salturi:

Observaţia 5.2.4 *1) Direct de la definiţii avem* $0 \le d^-(\gamma) \le d^+(\gamma) \le \infty$.

2) Gradul inferior de concurenţă a reţelei γ *reprezintă numărul minim de tranziţii maximal concurent j-posibile la orice marcare j-accesibilă a lui* γ*. Cu alte cuvinte, la orice marcare j-accesibilă* M *a reţelei* γ *există* $d^-(\gamma)$ *tranziţii concurent j-posibile la* M*.*

3) Gradul superior de concurenţă a reţelei γ *reprezintă numărul suprem de tranziţii maximal concurent j-posibile la orice marcare j-accesibilă a lui* γ*. Cu alte cuvinte, la orice marcare j-accesibilă* M *a reţelei* γ *există cel mult* $d^+(\gamma)$ *tranziţii concurent j-posibile la* M*.*

4) Gradul de concurenţă a reţelei γ *semnifică faptul că la orice marcare j-accesibilă* M *a reţelei* γ *există* $d(\gamma)$ *tranziţii concurent j-posibile la* M*, şi nu există nici o marcare j-accesibilă* M' *cu mai mult de* $d(\gamma)$ *tranziţii concurent j-posibile la* M'*.*

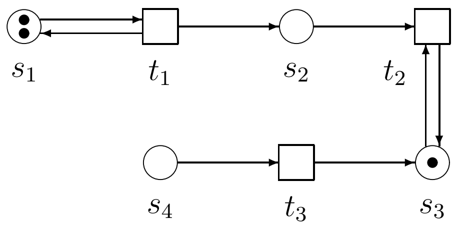
Exemplul 5.2.1 *Fie* $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ *reţeaua cu salturi marcată reprezentată în figura 5.6, care este o variantă modificată a reţelei din figura 4.16 (vezi exemplul 4.2.6 din capitolul 4).*

După cum se poate constata cu uşurinţă, mulţimea de j-accesibilitate a reţelei γ *este*

$$[M_0\rangle_{\gamma,j} = \{M_k \mid k \ge 0\} \cup \{M'_k \mid k \ge 0\}\,,$$

unde:

- $M_k = (2, k, 1, 0)$ *este marcarea accesibilă de la* M_0 *prin producerea secvenţei de tranziţie* t_1^k*;*
- $M'_k = (2, k, 0, 1)$ *este marcarea j-accesibilă de la* M_0 *prin producerea saltului reţelei, urmat apoi de secvenţa de tranziţie* t_1^k*.*



$$R = \{((2,0,1,0),(2,0,0,1))\}$$

Figura 5.6: Reţeaua cu salturi din exemplul 5.2.1

Deci, reţeaua are un singur salt, $R = \{(M_0, M'_0)\}$*, şi se observă faptul că tranziţia* t_1 *este posibilă la orice marcare j-accesibilă a reţelei* γ*, tranziţia* t_2 *este posibilă la orice marcare* M_k*,* $k \geq 1$*, iar tranziţia* t_3 *este posibilă la orice marcare* M'_k*,* $k \geq 0$*. Graful de j-accesibilitate al reţelei* γ*,* $\mathcal{RG}(\gamma)$*, este ilustrat în figura 5.7.*

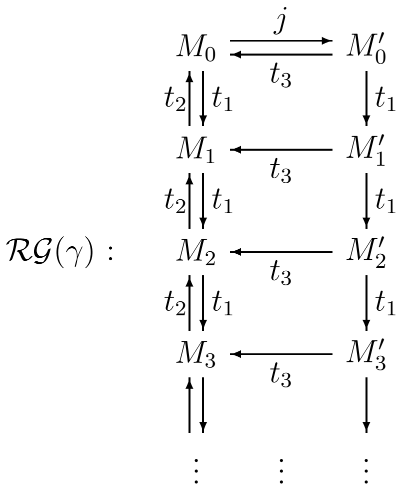


Figura 5.7: Graful de j-accesibilitate al reţelei din figura 5.6

De asemenea, tranziţiile t_2 *şi* t_3 *nu sunt concurent j-posibile cu ele însele la nici o marcare. Iar tranziţia* t_1 *este concurent j-posibilă cu ea însăşi (de 2 ori) la toate marcările j-accesibile ale reţelei* γ*.*

Figura 5.8 ilustrează graful de acoperire minimal al reţelei γ*, şi anume* $\mathcal{MCG}(\gamma) = \langle \mathcal{MCG}(\gamma_0), \mathcal{MCG}(\gamma_1) \rangle$ *, unde* $\gamma_0 = (\Sigma, M_0)$ *şi* $\gamma_1 = (\Sigma, M'_0)$ *sunt reţelele P/T asociate lui* γ*. Prin urmare, mulţimea de acoperire minimală a reţelei* γ *este* $MCS(\gamma) = \{(2,\omega,1,0),(2,\omega,0,1)\}$*.*

$$\mathcal{MCG}(\gamma_0): \begin{tikzcd} (2,\omega,1,0) \arrow[loop below, "t_1, t_2"] \end{tikzcd} \qquad \mathcal{MCG}(\gamma_1): \begin{tikzcd} (2,\omega,1,0) \arrow[loop below, "t_1, t_2"] & (2,\omega,0,1) \arrow[l, "t_3"'] \arrow[loop below, "t_1"] \end{tikzcd}$$

Figura 5.8: Graful de acoperire minimal al reţelei din figura 5.6

Se observă uşor că mulţimile de paşi maximali la marcările j-accesibile ale reţelei γ sunt următoarele:

- $\mathbb{Y}_{max}(\gamma, M_0) = \{2`t_1 + t_3\}$ *(datorită saltului* $(M_0, M_0')$ *al reţelei* $\gamma$*) şi* $\mathbb{Y}_{max}(\gamma, M_k) = \{2`t_1 + t_2\}$, $\forall\, k \geq 1$;
- $\mathbb{Y}_{max}(\gamma, M_k') = \{2`t_1 + t_3\}$, $\forall\, k \geq 0$.

Ca urmare, gradele de concurenţă la marcările j-accesibile ale reţelei γ *sunt:*

- $d(\gamma, M_k) = 3$, $\forall\, k \geq 0$;
- $d(\gamma, M_k') = 3$, $\forall\, k \geq 0$.

Deducem prin urmare că $d^+(\gamma) = d^-(\gamma) = 3$, *deci gradul de concurenţă a reţelei* γ *este* $d(\gamma) = 3$.

Să mai remarcăm faptul că gradele de concurenţă, la toate marcările j-accesibile ale reţelei γ*, a reţelei P/T suport a sa, sunt următoarele:* $d(\Sigma, M_0) = 2$ *(deoarece* $2`t_1$ *este singurul pas maximal posibil la* $M_0$ *în* $\Sigma$*),* $d(\Sigma, M_k) = 3$, $\forall\, k \geq 1$ *(deoarece* $2`t_1 + t_2$ *este singurul pas maximal posibil la marcarea* M_k *în* Σ*), şi* $d(\Sigma, M_k') = 3$, $\forall\, k \geq 0$ *(deoarece* $2`t_1 + t_3$ *este singurul pas maximal posibil la marcarea* M_k' *în* Σ*). Făcînd o comparaţie cu gradele, la aceleaşi marcări, ale reţelei* γ*, se observă astfel faptul că aceste grade verifică relaţia* (5.23)*, spre exemplu* $d(\gamma, M_0) = \sup\{d(\Sigma, M_0), d(\Sigma, M_0')\} = 3$.

Să mai remarcăm, de asemenea, faptul că gradele inferior şi superior de concurenţă a P/T-reţelei suport a lui γ *sunt* $d^-(\Sigma) = 2$ *şi* $d^+(\Sigma) = 3$,*gradul* $d(\Sigma)$ *este nedefinit, iar mulţimea de accesibilitate este* $[M_0\rangle_\Sigma = \{M_k \mid k \geq 0\}$.

În final, să menţionăm şi faptul că, pe baza vechilor definiţii ale gradelor de concurenţă din [50] care nu iau în considerare auto-concurenţa, gradul de concurenţă a reţelei γ *ar fi fost 2, în loc de 3, deoarece s-ar fi ignorat faptul că tranziţia* t_1 *este concurent j-posibilă cu ea însăşi (de 2 ori) la toate marcările j-accesibile ale reţelei* γ.

La fel ca la reţele P/T, uneori poate fi util să se ignore o parte dintre tranziţiile unei reţele cu salturi atunci cînd se calculează gradele ei de concurenţă, şi să se studieze comportamentul reţelei relativ la celelalte tranziţii. Din acest motiv, voi introduce în continuare noţiunea de grad de concurenţă a unei reţele cu salturi relativ la un subset de tranziţii.

Definiţia 5.2.5 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi şi $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii. Un T'-*pas *Y este un pas ce satisface $Y(t) = 0$, pentru orice $t \in T - T'$ (practic, Y este un multiset nevid şi finit peste submulţimea T'). Ca urmare, prin $\mathbb{Y}|_{T'}(\gamma) = \mathbb{Y}(\gamma) \cap T'_{MS}$ vom nota mulţimea tuturor T'-paşilor reţelei γ.*

În plus, vom nota prin $\mathbb{Y}|_{T'}(\gamma, M)$ mulţimea tuturor T'-paşilor j-posibili la M în γ, i.e. $\mathbb{Y}|_{T'}(\gamma, M) = \mathbb{Y}(\gamma, M) \cap T'_{MS}$, iar prin $(\mathbb{Y}|_{T'})_{max}(\gamma, M)$ mulţimea tuturor T'-paşilor maximali ce sunt j-posibili la marcarea M în γ, i.e. $(\mathbb{Y}|_{T'})_{max}(\gamma, M) = maximal(\, \mathbb{Y}|_{T'}(\gamma, M)\,)$.

Definiţia 5.2.6 *Fie $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi, $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii, şi M o marcare arbitrară a lui γ.* Gradul de concurenţă relativ la T' la marcarea M *a reţelei γ, notat cu $d(\gamma, T', M)$, este definit înlocuind $\mathbb{Y}(\gamma, M)$ cu $\mathbb{Y}|_{T'}(\gamma, M)$ în relaţia* (5.22).

Definiţia 5.2.7 *Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea cu salturi marcată şi $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii.* Gradul inferior, şi respectiv superior, de concurenţă relativ la T' *a reţelei γ, notat cu $d^-(\gamma, T')$, şi respectiv $d^+(\gamma, T')$, este definit înlocuind $d(\gamma, M)$ cu $d(\gamma, T', M)$ în relaţia* (5.24)*, şi respectiv* (5.25)*.*

În plus, dacă $d^-(\gamma, T') = d^+(\gamma, T')$, atunci acest număr este notat cu $d(\gamma, T')$ şi este numit gradul de concurenţă relativ la T' *a reţelei γ.*

Şi pentru aceste noţiuni vizînd gradele de concurenţă relativ la o submulţime de tranziţii au loc observaţii asemănătoare observaţiilor 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3 şi 5.2.4 valabile pentru noţiunile generale de mai înainte. De asemenea, are loc şi analoaga propoziţiei 5.2.1:

Propoziţia 5.2.2 *Pentru orice reţea cu salturi $\gamma = (\Sigma, R)$, orice $T' \subseteq T$ submulţime de tranziţii, şi orice marcare arbitrară M a reţelei γ,*

$$d(\gamma, T', M) = \sup\{\ d(\Sigma, T', M') \mid M\, R^*\, M'\ \}\ . \tag{5.26}$$

Exemplul 5.2.2 *Pentru reţeaua cu salturi marcată din exemplul 5.2.1, dacă ignorăm tranziţiile t_2 şi t_3, atunci gradul de concurenţă relativ la tranziţia t_1 este $d(\gamma, \{t_1\}) = 2$. Aceasta se justifică observînd faptul că mulţimile de $\{t_1\}$-paşi maximali j-posibili la marcările j-accesibile ale reţelei γ sunt următoarele:*

- $(\mathbb{Y}|_{\{t_1\}})_{max}(\gamma, M_k) = \{2\grave{}\, t_1\}$ *şi* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1\}})_{max}(\gamma, M'_k) = \{2\grave{}\, t_1\}$, $\forall\, k \geq 0$, *şi, ca urmare, gradele de concurenţă relativ la tranziţia t_1 la marcările j-accesibile ale reţelei γ sunt următoarele:*

- $d(\gamma, \{t_1\}, M_k) = 2$ *şi* $d(\gamma, \{t_1\}, M'_k) = 2$, $\forall\, k \geq 0$.

Iar dacă ignorăm tranziţia t_1, atunci gradul de concurenţă a reţelei γ relativ la setul de tranziţii $\{t_2, t_3\}$ este $d(\gamma, \{t_2, t_3\}) = 1$. Aceasta deoarece mulţimile de $\{t_2, t_3\}$-paşi maximali j-posibili la marcările j-accesibile ale reţelei γ sunt următoarele:

- $(\mathbb{Y}|_{\{t_2,t_3\}})_{max}(\gamma, M_0) = \{t_3\}$ *(datorită saltului (M_0, M'_0) al reţelei γ) şi* $(\mathbb{Y}|_{\{t_2,t_3\}})_{max}(\gamma, M_k) = \{t_2\}$, $\forall\, k \geq 1$;
- $(\mathbb{Y}|_{\{t_2,t_3\}})_{max}(\gamma, M'_k) = \{t_3\}$, $\forall\, k \geq 0$,

şi, ca urmare, gradele de concurenţă relativ la setul de tranziţii $\{t_2, t_3\}$ la marcările j-accesibile ale reţelei γ sunt următoarele:

- $d(\gamma, \{t_2, t_3\}, M_k) = 1$ *şi* $d(\gamma, \{t_2, t_3\}, M'_k) = 1$, $\forall\, k \geq 0$.

În plus, relativ la tranziţia t_2 gradele inferior şi superior de concurenţă a reţelei γ sunt $d^-(\gamma, \{t_2\}) = 0$ şi $d^+(\gamma, \{t_2\}) = 1$. Aceasta deoarece mulţimile de $\{t_2\}$-paşi maximali j-posibili la marcările j-accesibile sunt următoarele:

- $(\mathbb{Y}|_{\{t_2\}})_{max}(\gamma, M_0) = \emptyset$ *şi* $(\mathbb{Y}|_{\{t_2\}})_{max}(\gamma, M_k) = \{t_2\}$, $\forall\, k \geq 1$;
- $(\mathbb{Y}|_{\{t_2\}})_{max}(\gamma, M'_k) = \emptyset$, $\forall\, k \geq 0$,

şi, ca urmare, gradele de concurenţă relativ la tranziţia t_2 la marcările j-accesibile ale reţelei γ sunt următoarele:

- $d(\gamma, \{t_2\}, M_0) = 0$ *şi* $d(\gamma, \{t_2\}, M_k) = 1$, $\forall\, k \geq 1$;
- $d(\gamma, \{t_2\}, M'_k) = 0$, $\forall\, k \geq 0$.

Iar relativ la tranziţia t_3, gradele inferior şi superior de concurenţă sunt similare cu cele relativ la tranziţia t_2, i.e. $d^-(\gamma, \{t_3\}) = 0$ şi $d^+(\gamma, \{t_3\}) = 1$, întrucît gradele de concurenţă relativ la tranziţia t_3 la marcările j-accesibile ale reţelei γ sunt după cum urmează:

- $d(\gamma, \{t_3\}, M_0) = 1$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_3\}})_{max}(\gamma, M_0) = \{t_3\}$, *şi* $d(\gamma, \{t_3\}, M_k) = 0$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_3\}})_{max}(\gamma, M_k) = \emptyset$, $\forall\, k \geq 1$;
- $d(\gamma, \{t_3\}, M'_k) = 1$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_3\}})_{max}(\gamma, M'_k) = \{t_3\}$, $\forall\, k \geq 0$.

De asemenea, relativ la setul de tranziţii $\{t_1, t_2\}$ *gradele inferior şi superior de concurenţă a reţelei* γ *sunt* $d^-(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 2$ *şi* $d^+(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 3$, *întrucît gradele de concurenţă relativ la setul de tranziţii* $\{t_1, t_2\}$ *la marcările j-accesibile ale reţelei* γ *sunt după cum urmează:*

- $d(\gamma, \{t_1, t_2\}, M_0) = 2$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_2\}})_{max}(\gamma, M_0) = \{2`t_1\}$, *şi* $\forall\, k \geq 1$, $d(\gamma, \{t_1, t_2\}, M_k) = 3$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_2\}})_{max}(\gamma, M_k) = \{2`t_1 + t_2\}$ *;*
- $d(\gamma, \{t_1, t_2\}, M'_k) = 2$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_2\}})_{max}(\gamma, M'_k) = \{2`t_1\}$, $\forall\, k \geq 0$.

Iar relativ la setul de tranziţii $\{t_1, t_3\}$, *gradele inferior şi superior de concurenţă a reţelei* γ *sunt similare cu cele relativ la setul de tranziţii* $\{t_1, t_2\}$, *i.e.* $d^-(\gamma, \{t_1, t_3\}) = 2$ *şi* $d^+(\gamma, \{t_1, t_3\}) = 3$, *întrucît gradele de concurenţă relativ la setul de tranziţii* $\{t_1, t_3\}$ *la marcările j-accesibile ale reţelei* γ *sunt după cum urmează:*

- $d(\gamma, \{t_1, t_3\}, M_0) = 3$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_3\}})_{max}(\gamma, M_0) = \{2`t_1 + t_3\}$, *şi* $d(\gamma, \{t_1, t_3\}, M_k) = 2$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_3\}})_{max}(\gamma, M_k) = \{2`t_1\}$, $\forall\, k \geq 1$ *;*
- $d(\gamma, \{t_1, t_3\}, M'_k) = 3$, *deoarece* $(\mathbb{Y}|_{\{t_1,t_3\}})_{max}(\gamma, M'_k) = \{2`t_1 + t_3\}, \forall k \geq 0$.

5.2.2 Calculul gradelor de concurenţă

În continuare voi prezenta modul de calcul a gradelor de concurenţă pentru reţele Petri cu salturi.

Pentru început, vom vedea cum putem calcula gradul de concurenţă la o marcare (relativ la un subset de tranziţii) a reţelelor Petri cu salturi.

Şi anume, se poate remarca cu uşurinţă faptul că gradul de concurenţă la orice marcare (relativ la un subset de tranziţii) a unei reţele cu salturi $\gamma = (\Sigma, R)$ poate fi calculat dacă γ are proprietatea că

$$\{M' \mid M\, R^*\, M'\} \text{ este mulţime finită, pentru orice marcare } M.$$

Aceasta rezultă imediat din propoziţia 5.2.2, care ne dă şi formula de calcul a gradului de concurenţă, deoarece avem de calculat un suprem definit pe o mulţime finită, plus datorită faptului că gradul de concurenţă la orice marcare (relativ la un subset de tranziţii) a unei reţele P/T este calculabil (conform teoremei 5.1.1).

Să observăm faptul că orice reţea cu salturi finite are proprietatea de mai sus. Ca urmare, avem că:

Teorema 5.2.1 *Gradul de concurenţă la o marcare relativ la un subset de tranziţii,* $d(\gamma, T', M)$, *este calculabil pentru orice FJPTN* γ, *orice subset de tranziţii* T', *şi orice marcare* M.

În particular, pentru $T' = T$, obţinem drept consecinţă:

Corolarul 5.2.1 *Gradul de concurenţă la o marcare, $d(\gamma, M)$, este calculabil pentru orice FJPTN γ şi orice marcare M.*

În continuare, voi prezenta metoda de calcul a gradului superior, şi respectiv a celui inferior, de concurenţă (relativ la un subset de tranziţii) a unei reţele Petri cu salturi finite marcate.

Ideea principală este aceeaşi ca la reţele P/T: calculul gradului superior cu ajutorul mulţimii minimale de acoperire, şi respectiv calculul gradului inferior cu ajutorul mulţimii elementelor minimale ale mulţimii de j-accesibilitate.

Însă, spre deosebire de cazul reţelor P/T, pentru reţelele cu salturi am constatat (observaţia 5.2.3) că gradul de concurenţă la o marcare (relativ la un subset de tranziţii) a unei reţele Petri cu salturi nu este o funcţie monoton crescătoare în raport cu marcarea, deci trebuie să ţinem cont de acest fapt în adaptarea demonstraţiilor de calculabilitate a gradelor superior şi inferior de concurenţă de la reţele P/T pentru cazul reţelelor cu salturi.

Mai precis, ţinînd cont de legătura dintre gradul de concurenţă la o marcare a unei reţele cu salturi şi gradele de concurenţă ale P/T-reţelei suport a sa la marcările "accesibile" prin salturi de la acea marcare (propoziţia 5.2.1), precum şi de monotonia gradului de concurenţă la o marcare a unei reţele P/T (observaţia 5.1.5), rezultă că în cazul unei reţele cu salturi $\gamma = (\Sigma, R)$, marcările care nu respectă monotonia, i.e.

$$M_1 \leq M_2 \not\Rightarrow d(\gamma, M_1) \leq d(\gamma, M_2)\,,$$

se vor găsi printre marcările M cu proprietatea că

$$d(\gamma, M) \neq d(\Sigma, M)\,,$$

iar acestea sunt în număr finit în cazul reţelelor cu salturi finite, conform celor discutate mai sus la calculabilitatea gradului de concurenţă la o marcare pentru reţele cu salturi.

Ca atare, vom încerca să adaptăm demonstraţiile de calculabilitate a gradelor superior şi inferior de concurenţă de la reţele P/T pentru cazul reţelelor cu salturi finite, luînd în calcul acest număr finit de marcări care pot creea neplăceri deoarece nu respectă monotonia gradului de concurenţă la o marcare.

Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea cu salturi finite marcată, şi $T' \subseteq T$ un subset de tranziţii ale lui Σ. Mai mult, putem presupune că γ este R-redusă (aceasta se poate face, vezi [95] sau observaţia 1.2.1).

Să notăm cu $\mathcal{M}_{dif}$ mulţimea marcărilor care sunt "suspecte" de a nu respecta monotonia gradului de concurenţă la o marcare relativ la T', i.e.

$$\mathcal{M}_{dif} = \{M \in \mathbb{N}^S \mid d(\gamma, T', M) \neq d(\Sigma, T', M)\}\,. \tag{5.27}$$

Conform celor discutate mai sus, mulţimea $\mathcal{M}_{dif}$ este finită şi poate fi calculată, în felul următor.

Reţeaua γ avînd un număr finit de salturi, putem calcula mai întîi mulţimea marcărilor de la care există salturi spre alte marcări, i.e.

$$\mathcal{M}_j = \{M \in \mathbb{N}^S \mid \exists\, M' \neq M : M\, R^*\, M'\}\,,$$

prin simpla inspecţie a mulţimii finite de salturi R. Apoi, pe baza propoziţiei 5.2.1, rezultă că $\mathcal{M}_{dif} \subseteq \mathcal{M}_j$, mai precis că

$$\mathcal{M}_{dif} = \{M \in \mathcal{M}_j \mid d(\gamma, T', M) \neq d(\Sigma, T', M)\}\,,$$

şi deci mulţimea $\mathcal{M}_{dif}$ poate fi calculată prin inspecţia mulţimii $\mathcal{M}_j$ şi verificarea condiţiei $d(\gamma, T', M) \neq d(\Sigma, T', M)$ pentru fiecare element al ei (gradele de concurenţă $d(\gamma, T', M)$ şi $d(\Sigma, T', M)$ sunt calculabile pentru orice marcare M, conform teoremelor 5.1.1 şi 5.2.1).

Vom vedea în continuare cum trebuie luate în calcul marcările din mulţimea $\mathcal{M}_{dif}$ pentru a putea calcula gradele de concurenţă $d^+(\gamma, T')$ şi $d^-(\gamma, T')$ ale reţelei γ.

Deoarece $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ este o *mFJPTN* R-redusă, rezultă că mulţimea salturilor sale este de forma

$$R = \{\, (M_i', M_i'') \mid 1 \leq i \leq n\}\,, n \geq 1\,,$$

astfel încât $M_i' \in RS(\gamma), \forall\, 1 \leq i \leq n$ (n este numărul de salturi ale reţelei γ; putem presupune că $n \neq 0$, căci altfel $R = \emptyset$, deci γ ar fi practic o reţea P/T, iar cazul reţelelor P/T a fost tratat în subcapitolul 5.1).

Reţelei γ i se pot asocia următoarele reţele P/T marcate:

$$\gamma_0 = (\Sigma, M_0) \;\text{ şi }\; \gamma_i = (\Sigma, M_i'')\,,\text{ pentru fiecare } 1 \leq i \leq n\,, \tag{5.28}$$

şi ştim că mulţimea de j-accesibilitate a reţelei γ este formată din reuniunea mulţimilor de accesibilitate ale reţelelor P/T asociate lui γ, i.e.

$$RS(\gamma) = \cup\{RS(\gamma_i) \mid 0 \leq i \leq n\}\;.$$

Prin urmare, conform definiţiei 5.2.7, gradele inferior, şi respectiv superior, de concurenţă relativ la T' a reţelei γ pot fi calculate astfel:

$$d^-(\gamma, T') = \min_{M \in RS(\gamma)} d(\gamma, T', M) = \min_{0 \leq i \leq n} \left(\min_{M \in RS(\gamma_i)} d(\gamma, T', M) \right) \tag{5.29}$$

şi respectiv

$$d^{+}(\gamma, T') = \sup_{M \in RS(\gamma)} d(\gamma, T', M) = \max_{0 \leq i \leq n} \left(\sup_{M \in RS(\gamma_i)} d(\gamma, T', M) \right) \tag{5.30}$$

Aşadar, pentru a putea calcula gradele inferior, şi respectiv superior, de concurenţă relativ la T' a reţelei γ este suficient să arătăm cum putem calcula minimul şi supremul din interiorul parantezelor din membrii drepţi ai relaţiilor (5.29) şi (5.30).

Pentru fiecare $0 \leq i \leq n$, să notăm cu $\mathcal{M}_{dif,i}$ mulţimea marcărilor accesibile în P/T-reţeaua γ_i care sunt "suspecte" de a nu respecta monotonia gradului de concurenţă la o marcare relativ la T' în reţeaua cu salturi γ, i.e.

$$\mathcal{M}_{dif,i} = \mathcal{M}_{dif} \cap RS(\gamma_i)\,. \tag{5.31}$$

Evident, deoarece problema accesibilităţii pentru reţele P/T este decidabilă (observaţia 1.1.6), fiecare mulţime $\mathcal{M}_{dif,i}$ este finită şi poate fi calculată, prin simpla inspectare a mulţimii $\mathcal{M}_{dif}$ şi selectarea doar a acelor elemente ale ei care sunt accesibile în reţeaua γ_i.

Prin urmare avem că $d(\gamma, T', M) = d(\Sigma, T', M)$, pentru orice marcare $M \in RS(\gamma_i) - \mathcal{M}_{dif,i}$, şi orice $0 \leq i \leq n$, deci putem exprima minimul şi supremul din interiorul parantezelor din membrii drepţi ai relaţiilor (5.29) şi (5.30), punînd în evidenţă marcările "suspecte" de a nu respecta monotonia, în felul următor:

$$\min_{M \in RS(\gamma_i)} d(\gamma, T', M) = \min\left(\min_{M \in \mathcal{M}_{dif,i}} d(\gamma, T', M)\,, \min_{M \in RS(\gamma_i) - \mathcal{M}_{dif,i}} d(\Sigma, T', M) \right) \tag{5.32}$$

şi respectiv

$$\sup_{M \in RS(\gamma_i)} d(\gamma, T', M) = \max\left(\max_{M \in \mathcal{M}_{dif,i}} d(\gamma, T', M)\,, \sup_{M \in RS(\gamma_i) - \mathcal{M}_{dif,i}} d(\Sigma, T', M) \right) \tag{5.33}$$

Gradul de concurenţă la o marcare $d(\gamma, T', M)$ fiind calculabil, rezultă că

$$\min_{M \in \mathcal{M}_{dif,i}} d(\gamma, T', M) \quad \text{şi} \quad \max_{M \in \mathcal{M}_{dif,i}} d(\gamma, T', M)$$

sunt calculabile, pentru fiecare $0 \leq i \leq n$, fiind un minim, şi respectiv un maxim, definit pe mulţimea finită $\mathcal{M}_{dif,i}$.

Prin urmare, pentru a putea trage concluzia că gradele inferior, şi respectiv superior, de concurenţă relativ la T' a reţelei γ sunt calculabile, mai rămîne să demonstrăm că

$$\min_{M \in RS(\gamma_i) - \mathcal{M}_{dif,i}} d(\Sigma, T', M) \quad \text{şi} \quad \sup_{M \in RS(\gamma_i) - \mathcal{M}_{dif,i}} d(\Sigma, T', M) \tag{5.34}$$

sunt calculabile, pentru fiecare $0 \le i \le n$.

Dar faptul că minimul şi supremul din (5.34) sunt calculabile, rezultă pe baza următorului rezultat mai general:

Lema 5.2.1 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată, $T' \subseteq T$ un subset de tranziţii ale lui Σ, şi fie $\mathcal{M} \subseteq RS(\gamma)$ o mulţime finită de marcări accesibile ale reţelei γ. Atunci*

$$\min_{M \in RS(\gamma) - \mathcal{M}} d(\Sigma, T', M) \quad \text{şi} \quad \sup_{M \in RS(\gamma) - \mathcal{M}} d(\Sigma, T', M)$$

sunt calculabile.

Demonstraţie. Acest rezultat reprezintă o generalizare a rezultatelor de calculabilitate referitoare la gradul inferior, şi respectiv superior, de concurenţă relativ la T' a unei reţele P/T, în speţă a teoremelor 5.1.2 şi 5.1.3, care se obţin din acest rezultat pentru cazul particular $\mathcal{M} = \emptyset$. Demonstraţia acestui rezultat poate fi găsită în anexa E de la sfîrşitul acestei lucrări. □

Prin urmare, conform celor demonstrate mai sus, am arătat că are loc următorul rezultat:

Teorema 5.2.2 *Gradul superior şi cel inferior de concurenţă relativ la un subset de tranziţii, $d^+(\gamma, T')$ şi respectiv $d^-(\gamma, T')$, sunt calculabile pentru orice mFJPTN γ şi orice subset de tranziţii T'.*

În particular, pentru $T' = T$, obţinem drept consecinţă:

Corolarul 5.2.2 *Gradul superior de concurenţă $d^+(\gamma)$ şi gradul inferior de concurenţă $d^-(\gamma)$ sunt calculabile pentru orice mFJPTN γ.*

5.2.3 Analiza modulară a concurenţei

Şi în cazul reţelelor Petri cu salturi, putem lua în considerare problema modularizării: o reţea se poate “descompune” în mai multe module, i.e. subreţele ale sale, ce au în comun anumite locaţii, care au rol de “interfaţă” (i.e., sunt *partajate*) între două sau mai multe module. Şi atunci studiul concurenţei în reţeaua globală se poate face analizînd concurenţa subreţelelor din care este formată. În acest sens, rezultatele de la reţele P/T care exprimă legătura dintre gradele de concurenţă a reţelei globale şi gradele de concurenţă ale subreţelelor componente ale acesteia, se păstrează şi pentru reţelele Petri cu salturi.

Astfel, rezultatul următor exprimă legătura existentă între gradul de concurenţă relativ la reuniunea a două submulţimi disjuncte de tranziţii şi gradele de concurenţă relativ la fiecare dintre cele două submulţimi:

Teorema 5.2.3 *i) Fie γ o reţea Petri cu salturi, $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii, şi M o marcare arbitrară a lui γ. Atunci are loc următoarea inegalitate:*

$$d(\gamma, T_1 \cup T_2, M) \leq d(\gamma, T_1, M) + d(\gamma, T_2, M) \ . \tag{5.35}$$

ii) Fie γ o reţea cu salturi marcată, şi $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii. Referitor la gradul superior de concurenţă are loc inegalitatea:

$$d^+(\gamma, T_1 \cup T_2) \leq d^+(\gamma, T_1) + d^+(\gamma, T_2) \ . \tag{5.36}$$

Demonstraţie. i) Se poate da o demonstraţie directă, prin adaptarea demonstraţiei acestei afirmaţii de la reţele P/T (vezi teorema 5.1.4, pct. i)) pentru cazul reţelelor cu salturi. Sau, alternativ, se poate folosi propoziţia 5.2.2 în conjuncţie cu rezultatul analog de la reţele P/T.

Voi ilustra cea din urmă metodă de demonstraţie. Fie deci $\gamma = (\Sigma, R)$ o reţea Petri cu salturi, $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii, şi M o marcare arbitrară a lui γ. Conform propoziţiei 5.2.2, avem că

$$d(\gamma, T_1 \cup T_2, M) = \sup\{\ d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M') \mid M\, R^*\, M'\ \}\ .$$

Fie M' o marcare arbitrară astfel încât $M\, R^*\, M'$. Pentru P/T-reţeaua Σ, conform teoremei 5.1.4, pct. i) avem că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M') \leq d(\Sigma, T_1, M') + d(\Sigma, T_2, M')\ .$$

Dar, pe de altă parte, deoarece $M\, R^*\, M'$, şi pe baza propoziţiei 5.2.2, avem

$$d(\Sigma, T_1, M') \leq \sup\{\ d(\Sigma, T_1, M') \mid M\, R^*\, M'\ \} = d(\gamma, T_1, M)\,,$$

şi similar

$$d(\Sigma, T_2, M') \leq \sup\{\ d(\Sigma, T_2, M') \mid M\, R^*\, M'\ \} = d(\gamma, T_2, M)\,.$$

Prin urmare, am arătat că

$$d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M') \leq d(\gamma, T_1, M) + d(\gamma, T_2, M)\,,$$

pentru orice marcare arbitrară M' astfel încât $M\, R^*\, M'$.

Trecînd la suprem după $M' \in \{M' \mid M\, R^*\, M'\ \}$ în inegalitatea anterioară obţinem inegalitatea

$$\sup\{\ d(\Sigma, T_1 \cup T_2, M') \mid M\, R^*\, M'\ \} \leq d(\gamma, T_1, M) + d(\gamma, T_2, M)\ \ ,$$

de unde, utilizînd propoziţia 5.2.2, rezultă inegalitatea dorită.

ii) Demonstraţia acestei inegalităţi decurge similar ca la reţele P/T – vezi teorema 5.1.4, demonstraţia pentru pct. ii), în care doar se înlocuieşte "Σ" cu "γ", "marcare accesibilă" cu "marcare j-accesibilă", şi respectiv "$M \in [M_0\rangle_\gamma$" cu "$M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$". $\square$

Observaţia 5.2.5 *Pentru reţele cu salturi se păstrează, de asemenea, şi observaţia 5.1.7 de la reţele P/T, care spune, referitor la gradul inferior de concurenţă, că nu are loc o inegalitate asemănătoare cu* (5.36)*, şi nici una cu semn schimbat. Această observaţie este justificată de următorul contraexemplu.*

Exemplul 5.2.3 *Să continuăm exemplul 5.2.1. Pentru reţeaua cu salturi marcată* $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ *din acel exemplu, am văzut deja care sunt gradele de concurenţă relativ la tranziţia* t_1*, relativ la tranziţia* t_2*, şi respectiv relativ la tranziţia* t_3*, precum şi relativ la submulţimea de tranziţii* $\{t_2, t_3\}$*, relativ la* $\{t_1, t_2\}$ *şi respectiv relativ la* $\{t_1, t_3\}$ *(în exemplul 5.2.2).*

Ca atare, pe baza acelui exemplu, se poate remarca uşor faptul că are loc $d(\gamma, \{t_2, t_3\}, M_k) = d(\gamma, \{t_2\}, M_k) + d(\gamma, \{t_3\}, M_k)$ *,* $\forall\, k \geq 0$*, şi respectiv* $d(\gamma, \{t_2, t_3\}, M'_k) = d(\gamma, \{t_2\}, M'_k) + d(\gamma, \{t_3\}, M'_k)$ *,* $\forall\, k \geq 0$*, deci* (5.35) *este o egalitate în acest caz, la toate marcările j-accesibile. Pentru acest exemplu de reţea, la fel se întîmplă şi pentru gradele la toate marcările j-accesibile relativ la setul de tranziţii* $\{t_1, t_2\}$*, şi respectiv relativ la setul* $\{t_1, t_3\}$*.*

Referitor la gradul superior de concurenţă, avem relativ la $\{t_2, t_3\}$ *că* $d^+(\gamma, \{t_2, t_3\}) = 1 < 1 + 1 = d^+(\gamma, \{t_2\}) + d^+(\gamma, \{t_3\})$ *, ceea ce înseamnă că* (5.36) *este o inegalitate strictă în acest caz. În schimb, relativ la* $\{t_1, t_2\}$ *avem că* $d^+(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 3 = 2 + 1 = d^+(\gamma, \{t_1\}) + d^+(\gamma, \{t_2\})$ *, precum şi o egalitate similară relativ la* $\{t_1, t_3\}$*, ceea ce înseamnă că* (5.36) *este o egalitate în acest caz.*

Referitor la gradul inferior de concurenţă, tot pentru acest exemplu, avem egalitatea $d^-(\gamma, \{t_1, t_2\}) = 2 = 2 + 0 = d^-(\gamma, \{t_1\}) + d^-(\gamma, \{t_2\})$ *, precum şi o egalitate similară relativ la* $\{t_1, t_3\}$*. În schimb, relativ la* $\{t_2, t_3\}$ *avem că* $d^-(\gamma, \{t_2, t_3\}) = 1 > 0 + 0 = d^-(\gamma, \{t_2\}) + d^-(\gamma, \{t_3\})$ *, ceea ce justifică cele spuse mai sus, în observaţia 5.2.5, adică faptul că pentru gradul inferior de concurenţă nu are loc o inegalitate analoagă cu* (5.36)*.*

Mai mult, în general nu are loc nici una cu semn schimbat. Un exemplu ce ilustrează această afirmaţie ar fi reţeaua cu salturi $\gamma_2 = (\Sigma_2, R, M_0)$*, unde* (Σ_2, M_0) *este reţeaua P/T marcată reprezentată în figura 5.5 (b) (vezi exemplul 5.1.5 din secţiunea anterioară), iar mulţimea de salturi o putem lua, spre exemplu, ca fiind* $R = \{(\,(1), (2)\,)\}$*. În acest caz, pentru reţeaua* γ_2 *avem inegalitatea:* $d^-(\gamma_2, \{t_1, t_2\}) = 1 < 1 + 1 = d^-(\gamma_2, \{t_1\}) + d^-(\gamma_2, \{t_2\})$ *.*

Similar ca la cazul reţelelor P/T, în ciuda observaţiei 5.2.5, care ne spune că pentru gradul inferior de concurenţă nu există o limită superioară asemănătoare cu cele existente pentru gradul de concurenţă la o marcare şi respectiv gradul superior de concurenţă, putem totuşi specifica o limită inferioară pentru gradul inferior de concurenţă a reţelelor cu salturi, şi anume:

Teorema 5.2.4 *Fie γ o reţea Petri cu salturi marcată, şi $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii. Atunci are loc următoarea inegalitate:*

$$d^-(\gamma, T_1 \cup T_2) \geq \max\{d^-(\gamma, T_1)\,,\, d^-(\gamma, T_2)\}\ . \tag{5.37}$$

Demonstraţie. Demonstraţia acestei inegalităţi decurge similar ca la reţele P/T – vezi demonstraţia teoremei 5.1.5, în care doar se înlocuieşte "Σ" cu "γ", "marcare accesibilă" cu "marcare j-accesibilă", şi respectiv "$M \in [M_0\rangle_\gamma$" cu "$M \in [M_0\rangle_{\gamma,j}$". □

Observaţia 5.2.6 *Pentru reţele cu salturi se păstrează, de asemenea, şi observaţia 5.1.8 de la reţele P/T, care exprimă faptul că inegalităţile* (5.35) *şi* (5.36) *din teorema 5.2.3, precum şi inegalitatea* (5.37) *din teorema 5.2.4, au loc şi în forma generalizată pentru orice reuniune finită de submulţimi de tranziţii disjuncte două cîte două. (Această afirmaţie se demonstrează imediat prin aplicarea repetitivă a inegalităţilor amintite pentru reuniune de două submulţimi disjuncte de tranziţii.)*

La fel ca la reţele P/T, şi pentru reţelele cu salturi un caz particular al acestor inegalităţi generalizate îl constituie cazul cînd submulţimile au cîte un singur element, obţinîndu-se astfel următorul rezultat, ce exprimă legătura existentă între gradul de concurenţă relativ la o submulţime de tranziţii şi gradele de concurenţă relativ la fiecare tranziţie individuală din acea submulţime:

Corolarul 5.2.3 *i) Fie γ o reţea Petri cu salturi, $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii, şi M o marcare arbitrară a lui γ. Atunci are loc inegalitatea:*

$$d(\gamma, T', M) \leq \sum_{t \in T'} d(\gamma, \{t\}, M)\ . \tag{5.38}$$

ii) Fie $\gamma = (\Sigma, R, M_0)$ o reţea Petri cu salturi marcată, şi $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii. Atunci au loc următoarele inegalităţi:

$$d^+(\gamma, T') \leq \sum_{t \in T'} d^+(\gamma, \{t\})\ , \tag{5.39}$$

şi respectiv

$$d^-(\gamma, T') \geq \max_{t \in T'} d^-(\gamma, \{t\})\ . \tag{5.40}$$

Demonstraţie. Analog ca la cazul reţelelor P/T, inegalităţile din acest corolar rezultă ca o simplă consecinţă a teoremelor 5.2.3 şi 5.2.4, prin aplicarea repetată (de $|T'| - 1$ ori) a inegalităţilor corespunzătoare din aceste teoreme. □

Similar ca la reţele P/T, şi pentru reţelele cu salturi ne putem pune întrebarea: cînd au loc cu egalitate inegalităţile (5.35), (5.36) şi (5.37), sau analoaga inegalităţii (5.36) pentru gradul inferior?

Ţinînd cont de propoziţia 5.2.1 care exprimă legătura dintre gradul de concurenţă la o marcare a unei reţele cu salturi şi gradele de concurenţă ale P/T-reţelei suport a sa la marcările "accesibile" prin salturi de la acea marcare, precum şi de observaţia făcută la reţele P/T, anume aceea că, gradul de concurenţă la o marcare relativ la o submulţime de tranziţii depinde *numai* de componentele acelei marcări corespunzătoare pre-locaţiilor tranziţiilor din acea submulţime, ne putem întreba dacă nu cumva teorema 5.1.6 de la reţele P/T, care exprima o proprietate *structurală* a reţelei ce este o condiţie suficientă pentru a avea loc o parte din egalităţile amintite mai sus, are loc şi pentru cazul reţelelor cu salturi.

Din păcate răspunsul este negativ, în sensul că pentru reţele Petri cu salturi condiţia $^\bullet T_1 \cap {}^\bullet T_2 = \emptyset$ nu mai este suficientă pentru a avea loc teorema 5.1.6 de la reţele P/T şi în acest caz, afirmaţie ce este justificată de următorul contraexemplu.

Exemplul 5.2.4 *Să considerăm reţeaua cu salturi* $\gamma_1 = (\Sigma_1, R, M_0)$*, unde* (Σ_1, M_0) *este reţeaua P/T marcată reprezentată în figura 5.5 (a) (vezi exemplul 5.1.5 din secţiunea anterioară), iar mulţimea de salturi o luăm ca fiind* $R = \{(\,(1,0),(2,0)\,)\ ,\ (\,(1,0),(0,2)\,)\}$*. În acest caz, pentru reţeaua* γ_1 *mulţimea de j-accesibilitate este* $[M_0\rangle_{\gamma_1} = \{(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2)\}$*, şi, datorită celor două salturi a căror primă componentă este* M_0*, mulţimea paşilor j-posibili la marcarea* $M_0 = (1,0)$ *este* $\mathbb{Y}(\gamma, M_0) = \{t_1, 2`t_1, t_2, 2`t_2\}$*.*

Ca atare, după cum se poate verifica cu uşurinţă, avem următoarele grade de concurenţă la marcarea M_0*:* $d(\gamma,\{t_1\},M_0) = 2$*,* $d(\gamma,\{t_2\},M_0) = 2$*, şi respectiv* $d(\gamma, M_0) = d(\gamma,\{t_1,t_2\},M_0) = 2$*.*

Prin urmare, deşi $^\bullet t_1 \cap {}^\bullet t_2 = \emptyset$*, totuşi are loc inegalitatea:*

$$d(\gamma,\{t_1,t_2\},M_0) < d(\gamma,\{t_1\},M_0) + d(\gamma,\{t_2\},M_0)\,.$$

De asemenea, referitor la gradele superior şi inferior de concurenţă, să reconsiderăm reţeaua cu salturi marcată γ *din exemplul 5.2.1. Pentru această reţea am văzut în exemplul 5.2.3 că avem inegalităţile*

$$d^+(\gamma,\{t_2,t_3\}) < d^+(\gamma,\{t_2\}) + d^+(\gamma,\{t_3\})\,,$$

şi respectiv

$$d^-(\gamma,\{t_2,t_3\}) > d^-(\gamma,\{t_2\}) + d^-(\gamma,\{t_3\})\,,$$

deşi reţeaua satisface condiţia $^\bullet t_2 \cap {}^\bullet t_3 = \emptyset$*.*

Rămîne aşadar o problemă deschisă, pentru cercetări viitoare, şi anume găsirea unor condiţii în care are loc o egalitate de forma (5.35) pentru gradul de concurenţă la o marcare a unei reţele cu salturi, şi respectiv o egalitate de forma (5.36) pentru gradele superior şi inferior de concurenţă a unei reţele cu salturi marcate.

5.3 Grade de concurenţă pentru reţele Petri de nivel înalt

Noţiunea de grade de concurenţă pentru reţele Petri de nivel înalt am introdus-o în lucrarea (Vidraşcu [120]), în care am arătat, de asemenea, cum se pot calcula toate cele trei categorii de grade de concurenţă definite (i.e., gradul local la o marcare oarecare, şi gradele globale, inferior şi superior, care iau în calcul gradele locale corespunzătoare tuturor marcărilor accesibile ale reţelei).

Mai precis, am definit noţiunea de grade de concurenţă pentru reţele Petri colorate, luînd în considerare şi *auto-concurenţa*, adică situaţia tranziţiilor posibile simultan cu ele însele la o marcare, la fel ca la reţele P/T. Şi, de asemenea, am introdus şi o noţiune mai fină, aceea de *grade de concurenţă relativ la un set de tranziţii*, care ignoră anumite tranziţii ale reţelei.

În această secţiune voi prezenta această definiţie a gradelor de concurenţă pentru reţele colorate, modul de calcul al acestora, precum şi cîteva rezultate şi observaţii legate de analiza modulară a concurenţei în reţele colorate, pe baza *rezultatelor originale* publicate într-o lucrare ce a fost prezentată la conferinţa SACCS 2004 ([120]).

5.3.1 Definirea gradelor de concurenţă

În această subsecţiune voi introduce o măsură a concurenţei pentru CP-reţele, extinzînd la acestea noţiunea de grade de concurenţă definită pentru reţele P/T clasice.

Noţiunea de *pas posibil la o marcare* (pasul fiind definit ca un multiset de tranziţii interpretate), şi evoluţia *concurentă prin paşi* a unei CP-reţele au fost deja definite în secţiunea 1.3 din capitolul 1 (a se vedea definiţiile 1.3.3 şi 1.3.4). În continuare voi defini gradele de concurenţă pe baza acestei noţiuni de pas posibil la o marcare. Stilul de prezentare este asemănător cu cel din cazul reţelelor P/T.

Definiţia 5.3.1 *Fie CPN o CP-reţea şi M o marcare arbitrară a lui CPN. Un pas Y este numit* pas maximal posibil *la marcarea M, dacă Y este pas posibil la M şi nu există nici un pas Y' posibil la M cu $Y' > Y$.*

Notaţia 5.3.1 *Fie CPN o CP-reţea şi M o marcare arbitrară a lui CPN. i) $BE(M)$ denotă mulţimea tuturor tranziţiilor interpretate posibile la marcarea M în CPN:*

$$BE(M) = \{(t,b) \in BE \mid M[(t,b)\rangle_{CPN}\} = \{Y \in \mathbb{Y} \mid M[Y\rangle_{CPN} \wedge |Y| = 1\}\,;$$

ii) $\mathbb{Y}(M)$ *denotă mulţimea tuturor paşilor posibili la marcarea* M *în* CPN, *adică mulţimea tuturor multiseturilor de tranziţii interpretate (concurent) posibile la* M*:*

$$\mathbb{Y}(M) = \{Y \in \mathbb{Y} \mid M[Y\rangle_{CPN}\}\,;$$

iii) $\mathbb{Y}_{max}(M)$ *denotă mulţimea tuturor paşilor maximali posibili la marcarea* M *în* CPN, *adică mulţimea tuturor multiseturilor maximale de tranziţii interpretate (concurent) posibile la* M*:*

$$\mathbb{Y}_{max}(M) = \{Y \in \mathbb{Y}(M) \mid \forall Y' \in \mathbb{Y} : Y' > Y \Rightarrow Y' \notin \mathbb{Y}(M)\}\,.$$

Observaţia 5.3.1 *În general vorbind, pot exista mai multe multiseturi maximale de tranziţii interpretate (concurent) posibile la o marcare* M*. Mai mult, maximalitatea multiseturilor relativ la concurenţă nu implică maximalitatea multiseturilor relativ la dimensiunea lor, i.e. putem avea doi paşi maximali* Y_1 *şi* Y_2 *posibili la o marcare* M*, cu* $|Y_1| < |Y_2|$.

Observaţia 5.3.2 *Fie* CPN *o CP-reţea, şi fie* $T_0 = \{t \in T \,|\, In(t) = \emptyset\}$ *mulţimea tranziţiilor cu premulţimea vidă, adică* T_0 *este mulţimea tranziţiilor posibile întotdeauna la orice marcare a reţelei* CPN *(cu orice interpretare* $b \in B(t)$*). Dacă* $T_0 = \emptyset$*, atunci este uşor de remarcat că mulţimile* $\mathbb{Y}(M)$ *şi* $\mathbb{Y}_{max}(M)$ *sunt finite, pentru orice marcare arbitrară* M *a reţelei* CPN*.*

Altfel, dacă $T_0 \neq \emptyset$*, atunci, pentru orice marcare arbitrară* M *a reţelei* CPN*,* $\mathbb{Y}(M)$ *este mulţime infinită, şi* $\mathbb{Y}_{max}(M) = \emptyset$*. Într-adevăr, există cel puţin o tranziţie* $t_0 \in T_0$*, deoarece* $T_0 \neq \emptyset$*, şi prin urmare* $(t_0, b) \in \mathbb{Y}(M)$*, pentru orice interpretare* $b \in B(t)$*. Deci* $\mathbb{Y}(M) \neq \emptyset$*, şi rezultă că, dacă* $Y \in \mathbb{Y}(M)$ *este un pas arbitrar posibil la* M*, atunci şi* $Y_k = Y + k`(t_0, b) \in \mathbb{Y}(M)$*, pentru orice* $k \in \mathbb{N}$*.*

Deci $\mathbb{Y}(M)$ *este infinită. Mai mult, pentru orice pas* $Y \in \mathbb{Y}(M)$*, mulţimea* $\mathbb{Y}(M)$ *conţine acest şir infinit strict crescător de paşi* $\{Y_k\}_{k\geq 0}$*, ce converge la limita* $Y^* : BE \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$*, definită prin*

$$Y^*(t,b) = \begin{cases} \infty & \text{, dacă } In(t) = 0 \\ Y(t,b) & \text{, altfel} \end{cases} \text{, pentru orice } (t,b) \in BE.$$

Este evident că în acest caz nu există nici un pas maximal posibil la M*, deci* $\mathbb{Y}_{max}(M) = \emptyset$*.*

Definiţia 5.3.2 *Fie* CPN *o CP-reţea şi* M *o marcare arbitrară.* Gradul de concurenţă la marcarea M *a reţelei* CPN *este definit prin:*

$$d(CPN, M) = \sup\{\ |Y| \ \mid Y \in \mathbb{Y}(M)\}\ . \tag{5.41}$$

Observaţia 5.3.3 *Gradul de concurenţă la marcarea M a unei CP-reţele CPN reprezintă, intuitiv, numărul suprem de tranziţii interpretate concurent posibile la M. Cu alte cuvinte, există cel mult $d(CPN, M)$ tranziţii interpretate concurent posibile la M.*

Observaţia 5.3.4 *Direct de la definiţie şi observaţia 5.3.2 rezultă că*
i) dacă $T_0 = \emptyset$, atunci

$$d(CPN, M) = \max\{ \ |Y| \ \mid Y \in \mathbb{Y}_{max}(M) \ \}\,, \tag{5.42}$$

pentru orice marcare $M \in \mathbb{M}$ (şi nu depinde de marcarea iniţială);
ii) dacă $T_0 \neq \emptyset$, atunci $d(CPN, M) = \infty$, pentru orice marcare $M \in \mathbb{M}$.

Observaţia 5.3.5 *Gradul de concurenţă la o marcare a unei CP-reţele este o funcţie monoton crescătoare în raport cu marcarea, i.e.*

$$M_1 \leq M_2 \ \Rightarrow \ d(CPN, M_1) \leq d(CPN, M_2)\,. \tag{5.43}$$

Justificare*: acest fapt rezultă imediat din proprietatea de monotonie a regulii de aplicabilitate a unui pas la o marcare:*

$$\text{dacă } M_1[Y\rangle_{CPN} \text{ şi } M_1 \leq M_2, \text{ atunci } M_2[Y\rangle_{CPN}\,,$$

pe baza căreia rezultă că $M_1 \leq M_2 \ \Rightarrow \ \mathbb{Y}(M_1) \subseteq \mathbb{Y}(M_2)$, de unde, trecînd la suprem conform definiţiei 5.3.2, se obţine afirmaţia (5.43).

Definiţia 5.3.3 *Fie CPN o CP-reţea.*
i) Gradul inferior de concurenţă *a reţelei CPN este definit prin:*

$$d^-(CPN) = \min\{ \ d(CPN, M) \mid M \in [M_0\rangle_{CPN}\} \tag{5.44}$$

ii) Gradul superior de concurenţă *a reţelei CPN este definit prin:*

$$d^+(CPN) = \sup\{ \ d(CPN, M) \mid M \in [M_0\rangle_{CPN}\} \tag{5.45}$$

iii) Dacă $d^-(CPN) = d^+(CPN)$, atunci notăm acest număr cu $d(CPN)$, şi îl numim gradul de concurenţă *a reţelei CPN.*

Observaţia 5.3.6 *Direct de la definiţii avem*

1) $0 \leq d^-(CPN) \leq d^+(CPN) \leq \infty$.

2) Gradul inferior de concurenţă a reţelei CPN reprezintă numărul minim de tranziţii interpretate maximal concurent posibile la orice marcare accesibilă a *reţelei CPN. Cu alte cuvinte, la orice marcare accesibilă M a reţelei CPN există $d^-(CPN)$ tranziţii interpretate concurent posibile la M.*

3) Gradul superior de concurenţă a reţelei CPN reprezintă numărul suprem de tranziţii interpretate maximal concurent posibile la orice marcare accesibilă a reţelei CPN. Cu alte cuvinte, la orice marcare accesibilă M a reţelei CPN există cel mult $d^+(CPN)$ tranziţii interpretate concurent posibile la M.

4) Gradul de concurenţă a reţelei CPN semnifică faptul că la orice marcare accesibilă M a reţelei CPN există $d(CPN)$ tranziţii interpretate concurent posibile la M, şi nu există nici o marcare accesibilă M' cu mai mult de $d(CPN)$ tranziţii interpretate concurent posibile la M'.

După cum se poate vedea şi din observaţia 5.3.2, uneori poate fi util să se ignore o parte dintre tranziţiile unei CP-reţele atunci cînd se calculează gradele ei de concurenţă, şi să se studieze comportamentul reţelei relativ la celelalte tranziţii. Din acest motiv, voi introduce în continuare noţiunea de grad de concurenţă a unei CP-reţele relativ la un subset de tranziţii interpretate, şi relativ la un subset de tranziţii.

Definiţia 5.3.4 *Fie CPN o CP-reţea şi $BE' \subseteq BE$ o submulţime de tranziţii interpretate. Un BE'-*pas *Y este un pas ce satisface $Y(t,b) = 0$, pentru orice $(t,b) \in BE - BE'$ (practic, Y este un multiset nevid şi finit peste submulţimea BE'). Ca urmare, prin $\mathbb{Y}|_{BE'} = \mathbb{Y} \cap BE'_{MS}$ vom nota mulţimea tuturor BE'-paşilor reţelei CPN.*

În plus, vom nota prin $\mathbb{Y}|_{BE'}(M)$ mulţimea tuturor BE'-paşilor posibili la M în CPN, i.e. $\mathbb{Y}|_{BE'}(M) = \mathbb{Y}(M) \cap BE'_{MS}$, iar prin $(\mathbb{Y}|_{BE'})_{max}(M)$ mulţimea tuturor BE'-paşilor maximali ce sunt posibili la marcarea M în CPN, i.e. $(\mathbb{Y}|_{BE'})_{max}(M) = maximal(\, \mathbb{Y}|_{BE'}(M)\,)$.

Definiţia 5.3.5 *Fie CPN o CP-reţea, $BE' \subseteq BE$ o submulţime de tranziţii interpretate, şi M o marcare arbitrară a lui CPN.* Gradul de concurenţă relativ la BE' la marcarea M *a reţelei CPN, notat cu $d(CPN, BE', M)$, este definit înlocuind $\mathbb{Y}(M)$ cu $\mathbb{Y}|_{BE'}(M)$ în relaţia* (5.41).

Definiţia 5.3.6 *Fie CPN o CP-reţea, şi $BE' \subseteq BE$ o submulţime de tranziţii interpretate.* Gradul inferior, şi respectiv superior, de concurenţă relativ la BE' *a reţelei CPN, notat cu $d^-(CPN, BE')$, şi respectiv $d^+(CPN, BE')$, este definit înlocuind $d(CPN, M)$ cu $d(CPN, BE', M)$ în relaţia* (5.44), *şi respectiv* (5.45).

În plus, dacă $d^-(CPN, BE') = d^+(CPN, BE')$, atunci acest număr este notat cu $d(CPN, BE')$ şi este numit gradul de concurenţă relativ la BE' *a reţelei CPN.*

Şi pentru aceste noţiuni vizînd gradele de concurenţă relativ la o submulţime de tranziţii interpretate au loc observaţii asemănătoare observaţiilor 5.3.3, 5.3.4, 5.3.5 şi 5.3.6 valabile pentru noţiunile generale de mai înainte.

Observaţia 5.3.7 *Utilizînd aceste noţiuni de grade de concurenţă relativ la un set de tranziţii interpretate, putem reformula definiţiile globale ale gradelor de concurenţă date mai înainte prin considerararea setului $BE' = BE$ (i.e. fără a ignora nici o tranziţie interpretată a reţelei):*

- *pentru orice* $M \in \mathbb{M} : d(CPN, M) = d(CPN, BE, M)$ *;*
- $d^-(CPN) = d^-(CPN, BE)$ *;*
- $d^+(CPN) = d^+(CPN, BE)$ *.*

Mai mult decît atît, putem vorbi despre grade de concurenţă a unei CP-reţele CPN relativ la un subset de tranziţii, $T' \subseteq T$. Şi anume, vom lua mulţimea tuturor *tranziţiilor interpretate corespunzătoare tranziţiilor din submulţimea* T', adică

$$BE' = \cup \{BE(t) \,|\, t \in T'\} = \cup \{\, \{t\} \times B(t) \,|\, t \in T'\} \ ,$$

şi vom defini toate noţiunile de mai sus relativ la T' prin utilizarea acestei mulţimi BE'.

Prin urmare, un T'*-pas* Y va fi un astfel de BE'-pas, $\mathbb{Y}|_{T'}$ va denota mulţimea tuturor T'-paşilor, $\mathbb{Y}|_{T'}(M)$ va denota mulţimea tuturor T'-paşilor posibili la M, iar $(\mathbb{Y}|_{T'})_{max}(M)$ va denota mulţimea tuturor T'-paşilor maximali ce sunt posibili la marcarea M în reţeaua CPN.

Definiţia 5.3.7 *Fie CPN o CP-reţea, $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii, şi M o marcare arbitrară a lui CPN.* Gradul de concurenţă relativ la T' la marcarea M *a reţelei CPN, notat cu $d(CPN, T', M)$, este definit prin*

$$d(CPN, T', M) = d(CPN, \cup \{BE(t) \,|\, t \in T'\}, M).$$

Definiţia 5.3.8 *Fie CPN o CP-reţea, şi $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii.* Gradul inferior, şi respectiv superior, de concurenţă relativ la T' *a reţelei CPN este definit prin*

$$d^-(CPN, T') = d^-(CPN, \cup \{BE(t) \,|\, t \in T'\})\,,$$

şi respectiv

$$d^+(CPN, T') = d^+(CPN, \cup \{BE(t) \,|\, t \in T'\})\,.$$

În plus, dacă $d^-(CPN, T') = d^+(CPN, T')$, acest număr este notat cu $d(CPN, T')$ şi este numit gradul de concurenţă relativ la T' *a reţelei CPN.*

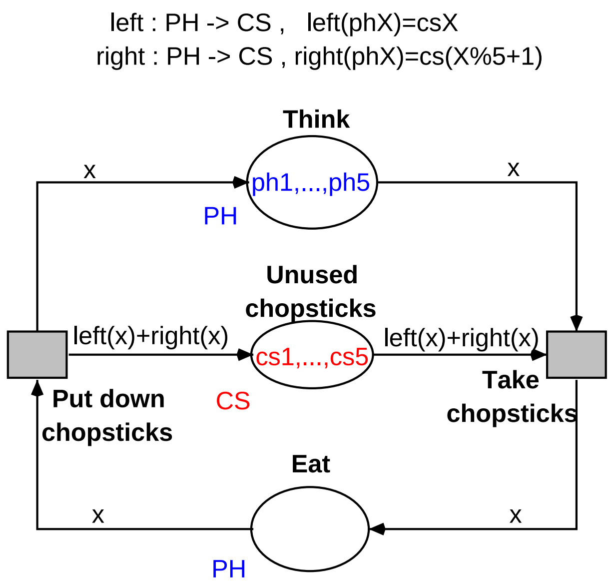


Figura 5.9: Cina filozofilor

Evident, şi pentru aceste noţiuni vizînd gradele de concurenţă relativ la o submulţime de tranziţii au loc observaţii asemănătoare observaţiilor 5.3.3, 5.3.4, 5.3.5 şi 5.3.6 valabile pentru noţiunile generale de mai înainte.

Exemplul 5.3.1 *Să considerăm binecunoscuta problemă a "Cinei filozofilor". Avem un sistem format din cinci filozofi chinezi ce sunt situaţi în jurul unei mese circulare. În mijlocul mesei există un platou cu mîncare de orez, fiecare filozof are în faţa sa o farfurie, şi între fiecare pereche de filozofi există un singur beţigaş pentru mîncat. Fiecare filozof îşi petrece timpul gîndind şi mîncînd alternativ. Pentru a mînca, fiecare filozof are nevoie de două beţigaşe pentru mîncat, şi îi este permis să utilizeze doar cele două situate lîngă el (în dreapta şi stînga sa). Evident, această restricţie (i.e. lipsă de resurse) împiedică doi filozofi vecini să mănînce în acelaşi timp.*

O posibilă modelare a acestui sistem printr-o reţea colorată este prezentată în figura 5.9, în care interpretările locaţiilor şi a tranziţiilor sunt date chair prin numele lor de pe figură (modelul acesta este pentru o versiune simplificată a acestei probleme – se consideră că acţiunea, efectuată de către un filozof, de ridicare de pe masă a celor două beţigaşe corespunzătoare acestuia, este o acţiune atomică*).*

Mai exact, diagrama CPN din figură corespunde următorului 9-uplu din definiţia reţelelor colorate: $CPN = (S, T, A, N, \Sigma, C, G, E, I)$*, unde:*

– *mulţimea locaţiilor este* $S = \{s_1, s_2, s_3\}$*, unde* s_1 *este "Think",* s_2 *este "Eat", şi* s_3 *este "Unused chopsticks";*

– *mulţimea tranziţiilor este* $T = \{t_1, t_2\}$*, unde* t_1 *este acţiunea "Take chopsticks" şi* t_2 *este acţiunea "Put down chopsticks";*

– *mulţimea arcelor este* $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ *cu funcţia nod definită prin:* $N(a_1) = (s_1, t_1)$*,* $N(a_2) = (t_1, s_2)$*,* $N(a_3) = (s_3, t_1)$*,* $N(a_4) = (s_2, t_2)$*,* $N(a_5) = (t_2, s_1)$*, şi* $N(a_6) = (t_2, s_3)$*;*

– *există două mulţimi de culori, i.e.* $\Sigma = \{PH, CS\}$*, unde mulţimea de culori* $PH = \{ph_1, ph_2, ph_3, ph_4, ph_5\}$ *reprezintă filozofii, iar mulţimea de culori* $CS = \{cs_1, cs_2, cs_3, cs_4, cs_5\}$ *reprezintă beţigaşele;*

– *funcţia culoare* C *este definită prin* $C(s_1) = C(s_2) = PH$ *şi respectiv* $C(s_3) = CS$*;*

– *funcţia gardă este* `true` *pentru ambele tranziţii;*

– *expresiile de arc sunt:* $E(a_1) = E(a_2) = E(a_4) = E(a_5) = x$*, unde* x *este o variabilă cu* $Type(x) = PH$*, şi* $E(a_3) = E(a_6) = left(x) + right(x)$*, unde, aşa cum se poate vedea şi în figură, funcţiile* $left, right : PH \to CS$ *sunt definite prin* $left(ph_i) = cs_i$ *şi respectiv* $right(ph_i) = cs_{i\%5+1}$*, pentru fiecare* $i = 1, \ldots, 5$*;*

– *funcţia de iniţializare este definită prin* $I(s_1) = PH$*,* $I(s_2) = \emptyset$*, şi* $I(s_3) = CS$*.*

În continuare, să studiem comportamentul acestei reţele colorate.

Există cinci interpretări pentru ambele tranziţii, şi anume $B(t_1) = B(t_2) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$*, unde* $b_i = <x{=}ph_i>$*, pentru fiecare* $i = 1, \ldots, 5$*.*

Fie M_0 *marcarea iniţială a acestei reţele, i.e.* $M_0(s_1) = PH$*,* $M_0(s_2) = \emptyset$*, şi* $M_0(s_3) = CS$*.*

Fie M_i *marcarea produsă prin apariţia la* M_0 *a pasului* $Y_i = (t_1, b_i)$*, i.e.* $M_0\,[Y_i\rangle_{CPN}\,M_i$*, pentru fiecare* $i = 1, \ldots, 5$*.* M_i *este marcarea în care numai filozoful* ph_i *mănîncă. Pasul* Y_i *mută filozoful* ph_i *din activitatea de gîndire în cea de hrănire. Fie* $Y_i' = (t_2, b_i)$ *pasul care mută filozoful* ph_i *din activitatea de hrănire în cea de gîndire, i.e.* $M_i\,[Y_i'\rangle_{CPN}\,M_0$*, pentru fiecare* $i = 1, \ldots, 5$*.*

Fie $\neg Neighbours = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}\}$ *mulţimea perechilor de filozofi care nu sunt vecini (la masă), şi fie* $\neg neighbour$ *funcţia care dă ne-vecinii unui filozof, i.e.*

$$\neg neighbour(i) = \{j \in \{1, \ldots, 5\} \mid \{i, j\} \in \neg Neighbours\},$$

pentru fiecare $i = 1, \ldots, 5$.

Fie $M_{\{i,j\}}$ *marcarea produsă prin apariţia la* M_0 *a pasului* $Y_{\{i,j\}} = (t_1, b_i) + (t_1, b_j)$, *i.e.* $M_0\, [Y_{\{i,j\}}\rangle_{CPN}\, M_{\{i,j\}}$, *pentru orice* $\{i,j\} \in \neg Neighbours$. $M_{\{i,j\}}$ *este marcarea în care cei doi filozofi ne-vecini* ph_i *şi* ph_j *mănîncă. Pasul* $Y_{\{i,j\}}$ *mută simultan filozofii* ph_i *şi* ph_j *din activitatea de gîndire în cea de hrănire. Fie* $Y'_{\{i,j\}} = (t_2, b_i) + (t_2, b_j)$ *pasul care mută simultan filozofii* ph_i *şi* ph_j *din activitatea de hrănire în cea de gîndire, i.e.* $M_{\{i,j\}}\, [Y'_{\{i,j\}}\rangle_{CPN}\, M_0$, *pentru orice* $\{i,j\} \in \neg Neighbours$.

Aceste 11 marcări sunt toate marcările accesibile (de la M_0*) ale reţelei colorate* CPN. *Paşii posibili la fiecare din aceste marcări sunt după cum urmează:*

- *pentru marcarea* M_0 *:*
  $\mathbb{Y}(M_0) = \{Y_i \,|\, i{=}1, \ldots, 5\} \;\cup\; \{Y_{\{i,j\}} \,|\, \{i,j\} \in \neg Neighbours\}$;
- *pentru marcarea* M_i, $i = 1, \ldots, 5$ *:*
  $\mathbb{Y}(M_i) = \{Y'_i\} \cup \{Y_j\ ,\ Y'_i + Y_j \,|\, j \in \neg neighbour(i)\}$;
- *pentru marcarea* $M_{\{i,j\}}$, $\{i,j\} \in \neg Neighbours$ *:*
  $\mathbb{Y}(M_{\{i,j\}}) = \{Y'_i\ ,\ Y'_j\ ,\ Y'_i + Y'_j\}$.

Prin urmare, este uşor de remarcat faptul că gradele de concurenţă la marcările accesibile ale reţelei colorate CPN *sunt următoarele:*
– $d(CPN, M_0) = 2$ *;*
– $d(CPN, M_i) = 2$ *, pentru orice* $i = 1, \ldots, 5$*;*
– $d(CPN, M_{\{i,j\}}) = 2$ *, pentru orice* $\{i,j\} \in \neg Neighbours$.

Aşadar, gradele inferior şi superior de concurenţă a reţelei CPN *sunt* $d^-(CPN) = d^+(CPN) = 2$, *şi prin urmare reţeaua are gradul de concurenţă* $d(CPN) = 2$.

În plus, să mai remarcăm faptul că, dacă se ignoră tranziţia t_2, *atunci gradele de concurenţă relativ la tranziţia* t_1 *sunt următoarele:*
– $d(CPN, \{t_1\}, M_0) = 2$ *;*
– $d(CPN, \{t_1\}, M_i) = 1$ *, pentru fiecare* $i = 1, \ldots, 5$*;*
– $d(CPN, \{t_1\}, M_{\{i,j\}}) = 0$ *, pentru orice* $\{i,j\} \in \neg Neighbours$,
şi, ca urmare, gradele inferior şi superior de concurenţă relativ la tranziţia t_1 *a reţelei* CPN *sunt* $d^-(CPN, \{t_1\}) = 0$, *şi respectiv* $d^+(CPN, \{t_1\}) = 2$.

De asemenea, ignorînd tranziţia t_1, *avem relativ la tranziţia* t_2 *gradele:*
– $d(CPN, \{t_2\}, M_0) = 0$ *;*
– $d(CPN, \{t_2\}, M_i) = 1$ *, pentru fiecare* $i = 1, \ldots, 5$*;*
– $d(CPN, \{t_2\}, M_{\{i,j\}}) = 2$ *, pentru orice* $\{i,j\} \in \neg Neighbours$,
şi, ca urmare, gradele inferior şi superior de concurenţă relativ la tranziţia t_2 *a reţelei* CPN *sunt* $d^-(CPN, \{t_2\}) = 0$, *şi respectiv* $d^+(CPN, \{t_2\}) = 2$.

5.3.2 Calculul gradelor de concurenţă

După cum am amintit în secţiunea 1.3 din capitolul 1, reţelele colorate sunt echivalente ca *putere de modelare* cu reţelele P/T ([42]). Mai exact, pentru fiecare reţea colorată neierarhică se poate construi o unică reţea P/T echivalentă cu ea, i.e. o reţea P/T care are acelaşi comportament ca şi reţeaua colorată, şi reciproc, pentru fiecare reţea P/T se poate construi o reţea colorată neierarhică (nu neapărat unică) echivalentă cu ea. Existenţa unei reţele P/T echivalente este extrem de folositoare, întrucît ne spune cum să generalizăm conceptele de bază şi metodele de analiză de la reţele P/T la reţele colorate neierarhice.

Dată o CP-reţea CPN, am văzut cum se face construcţia echivalentei P/T a ei, notată cu PTN_{CPN}, în secţiunea 1.3 din capitolul 1, definiţia 1.3.9. Echivalenţa constă în faptul că reţelele CPN şi PTN_{CPN} au aceleaşi mulţimi de marcări şi de paşi, şi respectiv aceleaşi secvenţe de apariţie, şi deci sunt echivalente comportamental (a se vedea teorema 1.3.1 din capitolul amintit mai sus).

Observaţia 5.3.8 *Reţeaua P/T echivalentă PTN_{CPN}, definită în definiţia 1.3.9, are, eventual, structură infinită, i.e. poate avea mulţimi infinite de locaţii şi de tranziţii, deci nu respectă întru totul definiţia uzuală a reţelor P/T (definiţie ce impune restricţia ca mulţimile de locaţii şi de tranziţii să fie finite).*

Dar, dacă toate mulţimile de culori ale CP-reţelei CPN sunt finite (i.e. toate tipurile de date din mulţimea Σ sunt finite), atunci mulţimile TE şi BE sunt finite, şi ca urmare P/T-reţeaua echivalentă este într-adevăr o reţea P/T conformă cu definiţia.

Să mai remarcăm faptul că, în practică, toate CP-reţelele utilizate pentru modelarea sistemelor reale lucrează cu tipuri de date finite (datorită constrîngerilor impuse de reprezentarea datelor în calculator, asupra aplicaţiilor software folosite pentru modelare).

De la definiţiile gradelor de concurenţă pentru CP-reţele introduse în subsecţiunea anterioară, şi definiţiile gradelor de concurenţă pentru P/T-reţele din subsecţiunea 5.1.1, este uşor de văzut că gradele de concurenţă a unei CP-reţele CPN sunt egale cu gradele de concurenţă corespunzătoare ale P/T-reţelei echivalente PTN_{CPN}. Mai precis, au loc următoarele rezultate:

Propoziţia 5.3.1 *Fie CPN o CP-reţea (cu mulţimi de culori finite) şi fie PTN_{CPN} echivalenta sa P/T. Atunci au loc următoarele proprietăţi:*
i) gradele de concurenţă "globale" ale reţelei CPN sunt:
• $d(CPN, M) = d(PTN_{CPN}, M)$, *pentru toate marcările* $M \in \mathbb{M}$;

• $d^-(CPN) = d^-(PTN_{CPN})$ *;*
• $d^+(CPN) = d^+(PTN_{CPN})$ *.*
ii) gradele de concurenţă, relativ la o submulţime BE' *de tranziţii interpretate, ale reţelei* CPN *sunt:*
• $d(CPN, BE', M) = d(PTN_{CPN}, BE', M)$*,* $\forall\, M \in \mathbb{M}$ *;*
• $d^-(CPN, BE') = d^-(PTN_{CPN}, BE')$ *;*
• $d^+(CPN, BE') = d^+(PTN_{CPN}, BE')$ *.*
iii) gradele de concurenţă, relativ la o submulţime T' *de tranziţii, ale reţelei* CPN *sunt:*
• $d(CPN, T', M) = d(PTN_{CPN}, T^*, M)$*,* $\forall\, M \in \mathbb{M}$ *;*
• $d^-(CPN, T') = d^-(PTN_{CPN}, T^*)$ *;*
• $d^+(CPN, T') = d^+(PTN_{CPN}, T^*)$ *,*
unde $T^* = \cup\{BE(t) \,|\, t \in T'\}$*.*

Demonstraţie. Verificarea acestor proprietăţi este imediată de la definiţii şi ca atare am omis-o. □

Prin urmare, obţinem rezultatul:

Teorema 5.3.1 *Toate gradele de concurenţă sunt calculabile pentru orice CP-reţea cu mulţimi de culori finite.*

Demonstraţie. Această afirmaţie este o simplă consecinţă a propoziţiei anterioare şi a rezultatelor despre calculabilitatea gradelor de concurenţă pentru reţele P/T din subsecţiunea 5.1.2. □

5.3.3 Analiza modulară a concurenţei

Pe baza propoziţiei 5.3.1 din subsecţiunea anterioară, care exprimă legătura dintre gradele de concurenţă ale unei CP-reţele CPN şi gradele corespunzătoare ale P/T-reţelei echivalente PTN_{CPN} asociate ei, toate rezultatele şi observaţiile de la reţele P/T, referitoare la legătura existentă între gradul de concurenţă relativ la o submulţime de tranziţii şi gradele de concurenţă relativ la fiecare tranziţie individuală din acea submulţime (a se vedea subsecţiunea 5.1.3), se pot translata la CP-reţele cu mulţimi de culori finite, formulate în termeni de grade relativ la o submulţime de tranziţii interpretate şi de grade relativ la o submulţime de tranziţii.

Astfel, spre exemplu, teoremele 5.1.4 şi 5.1.5 şi corolarul 5.1.4 de la reţele P/T se reformulează în felul următor pentru CP-reţele cu mulţimi de culori finite, în termeni de grade relativ la o submulţime de tranziţii:

Teorema 5.3.2 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite şi fie $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii.*
i) Pentru orice marcare arbitrară M a reţelei CPN, are loc inegalitatea:

$$d(CPN, T_1 \cup T_2, M) \leq d(CPN, T_1, M) + d(CPN, T_2, M) \ . \qquad (5.46)$$

ii) Are loc următoarea inegalitate referitoare la gradul superior:

$$d^+(CPN, T_1 \cup T_2) \leq d^+(CPN, T_1) + d^+(CPN, T_2) \ . \qquad (5.47)$$

iii) Are loc următoarea inegalitate referitoare la gradul inferior:

$$d^-(CPN, T_1 \cup T_2) \geq \max\{d^-(CPN, T_1)\, ,\, d^-(CPN, T_2)\} \ . \qquad (5.48)$$

Corolarul 5.3.1 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite şi $T' \subseteq T$ o submulţime de tranziţii.*
i) Pentru orice marcare arbitrară M a reţelei CPN, are loc inegalitatea:

$$d(CPN, T', M) \leq \sum_{t \in T'} d(CPN, \{t\}, M) \ . \qquad (5.49)$$

ii) Are loc următoarea inegalitate referitoare la gradul superior:

$$d^+(CPN, T') \leq \sum_{t \in T'} d^+(CPN, \{t\}) \ . \qquad (5.50)$$

iii) Are loc următoarea inegalitate referitoare la gradul inferior:

$$d^-(CPN, T') \geq \max_{t \in T'} d^-(CPN, \{t\}) \ . \qquad (5.51)$$

Exemplul 5.3.2 *Pentru CP-reţeaua din exemplul 5.3.1, pentru care am calculat deja gradele de concurenţă în acel exemplu, este uşor de observat că*

$$d(CPN, \{t_1, t_2\}, M) = 2 = d(CPN, \{t_1\}, M) + d(CPN, \{t_2\}, M)\, ,$$

pentru orice marcare accesibilă M, ceea ce înseamnă că (5.49) *este o egalitate în acest caz.*

Tot pentru acest exemplu avem, referitor la gradele superioare, că

$$d^+(CPN, \{t_1, t_2\}) = 2 < 2 + 2 = d^+(CPN, \{t_1\}) + d^+(CPN, \{t_2\})\, .$$

Aceasta înseamnă că (5.50) *este o inegalitate strictă în acest caz.*

De asemenea, să mai remarcăm, referitor la gradele inferioare, faptul că

$$d^-(CPN, \{t_1, t_2\}) = 2 > 0 = \max\{d^-(CPN, \{t_1\})\, ,\, d^-(CPN, \{t_2\})\}\, .$$

Aceasta înseamnă că (5.51) *este o inegalitate strictă în acest caz.*

Mai mult decît atît, după cum am observat la reţele P/T, pentru gradul de concurenţă inferior nu are loc, în general, nici o inegalitate analoagă cu (5.50)*, nici una cu semn schimbat.*

De asemenea, teorema 5.1.6, corolarul 5.1.5 şi observaţia de la reţele P/T referitoare la condiţiile în care au loc cu egalitate inegalităţile de forma (5.49), (5.50) şi (5.51), se pot translata la CP-reţele cu mulţimi de culori finite, formulate în termeni de grade relativ la o submulţime de tranziţii interpretate şi de grade relativ la o submulţime de tranziţii.

Astfel, spre exemplu, teorema 5.1.6 de la reţele P/T se reformulează în felul următor pentru CP-reţele cu mulţimi de culori finite, în termeni de grade relativ la o submulţime de tranziţii:

Teorema 5.3.3 *Fie CPN o CP-reţea cu mulţimi de culori finite şi fie $T_1, T_2 \subseteq T$ două submulţimi disjuncte de tranziţii. Dacă reţeaua CPN satisface proprietatea că $In(T_1) \cap In(T_2) = \emptyset$ (adică, cu alte cuvinte, pentru orice pereche de tranziţii $t_1 \in T_1$ şi $t_2 \in T_2$, t_1 şi t_2 nu au pre-locaţii comune, i.e. ele sunt "independente" una de alta), atunci are loc următoarea egalitate:*

$$d(CPN, T_1 \cup T_2, M) = d(CPN, T_1, M) + d(CPN, T_2, M) \ , \tag{5.52}$$

pentru orice marcare $M \in \mathbb{M}$ a reţelei CPN.

În plus, referitor la gradul inferior de concurenţă are loc inegalitatea:

$$d^-(CPN, T_1 \cup T_2) \geq d^-(CPN, T_1) + d^-(CPN, T_2) \ . \tag{5.53}$$

Capitolul 6

Concluzii şi perspective

6.1 Privire de ansamblu

Teza prezentată reprezintă rezultatul activităţii de cercetare desfăşurată de autor în domeniul reţelelor Petri. Scopul său principal îl constituie studiul proprietăţilor şi a metodelor de analiză pe baza cărora sunt decidabile aceste proprietăţi, pentru o serie de clase de reţele Petri, accentul principal fiind pus pe clasa reţelelor Petri cu salturi, introdusă de colectivul de cercetare de la Iaşi.

În această lucrare au fost studiate trei metode de analiză a reţelelor Petri:

- structuri de acoperire ;
- tehnica invarianţilor ;
- grade de concurenţă ,

precum şi aplicaţiile acestor metode, pentru trei clase de reţele Petri:

- reţele P/T clasice ;
- reţele cu salturi ;
- reţele colorate .

Principalele *rezultate originale* sunt conţinute în capitolele 3, 4, şi 5. Contribuţiile aduse de această lucrare constau în:

- Partea originală cea mai consistentă este cea referitoare la reţelele Petri cu salturi (pentru toate cele trei metode de analiză).

- De asemenea, gradele de concurenţă pentru celelalte categorii de reţele amintite reprezintă tot o contribuţie originală a acestei lucrări.
- În sfîrşit, o contribuţie originală de mai mică însemnătate o constituie structurile de acoperire pentru reţele colorate.

6.2 Direcţii viitoare de cercetare

Ca viitoare direcţii de cercetare intenţionăm:

- găsirea unor subclase ale clasei de reţele *mRCJPTN*, care să se bucure de o descriere simplă şi să fie destul de generale;
- de studiat dacă problema finititudinii arborelui de accesibilitate şi problema regularităţii sunt decidabile pe baza arborelui de acoperire minimal pentru *mRCJPTN* (ţinînd cont de faptul că acestea sunt decidabile pentru *mPTN*);
- extinderea structurilor de acoperire, precum şi a rezultatelor de decidabilitate referitoare la acestea, de la subclasa *mRCJPTN* la întreaga clasă a reţelelor cu salturi, şi, respectiv, de la subclasa reţelelor colorate cu mulţimi de culori finite la întreaga clasă a reţelelor colorate;
- extinderea noţiunilor de S-invariant şi T-invariant de la subclasa reţelelor cu salturi Δ-finite la întreaga clasă a reţelelor cu salturi, sau eventual la alte subclase ale acesteia care să fie mai ample decît subclasa reţelelor cu salturi Δ-finite;
- găsirea unor algoritmi mai eficienţi decît cei prezentaţi în lucrarea de faţă, pentru calculul gradelor de concurenţă a reţelelor P/T, a reţelelor cu salturi finite şi, respectiv, a reţelelor colorate cu mulţimi de culori finite;
- extinderea rezultatelor de calculabilitate referitoare la grade de concurenţă de la subclasa reţelelor cu salturi finite la întreaga clasă a reţelelor cu salturi, şi, respectiv, de la subclasa reţelelor colorate cu mulţimi de culori finite la întreaga clasă a reţelelor colorate;
- găsirea unor condiţii suficiente pentru a avea egalitate în anumite inegalităţi referitoare la legătura între gradele de concurenţă a unei reţele şi cele ale subreţelelor sale, pentru cazul reţelelor P/T (a se vedea problema deschisă formulată la sfîrşitul secţiunii 5.1) şi, respectiv, a

reţelelor Petri cu salturi (a se vedea problema deschisă formulată la sfîrşitul secţiunii 5.2);

- efectuarea unor studii de caz pe modele ale unor sisteme reale de complexitate sporită;

- studiul uneia dintre cele mai recente clase de reţele Petri de nivel înalt – reţelele Petri dinamice (pe mai multe nivele) – şi extinderea structurilor de accesibilitate şi de acoperire, a invarianţilor, şi respectiv a gradelor de concurenţă, împreună cu aplicaţiile lor, la această clasă de reţele.

Anexe

Anexa A: Mulţimi şi multiseturi

Pentru noţiuni uzuale de teoria mulţimilor (inclusiv relaţii şi funcţii) există mai multe monografii standard ce pot fi consultate, printre care cea mai recentă, în româneşte, este [94].

În cele ce urmează ne vom rezuma doar la cîteva concepte şi notaţii de bază referitoare la multiseturi (regăsite în literatură şi sub denumirea de multimulţimi).

Un *multiset* m, peste o mulţime nevidă S, este orice funcţie

$$m : S \to \mathbb{N}.$$

Uzual, multisetul m se reprezintă ca o sumă formală

$$\sum_{s \in S} m(s)`s \ .$$

Numărul întreg nenegativ $m(s) \in \mathbb{N}$ reprezintă *numărul de apariţii* ale elementului s în multisetul m, şi este numit *coeficientul* elementului s în multisetul m.

Un element $s \in S$ se spune că *aparţine* multisetului m dacă şi numai dacă $m(s) \neq 0$, şi în acest caz scriem $s \in m$.

Vom nota prin S_{MS} mulţimea tuturor multiseturilor peste S. Iar prin $\emptyset$ vom nota multisetul vid, adică multisetul ce are coeficienţii tuturor elementelor zero.

În mod evident, există o corespondenţă de unu-la-unu între mulţimea tuturor submulţimilor lui S şi mulţimea acelor multiseturi $m \in S_{MS}$ cu $0 \leq m(s) \leq 1$ pentru orice $s \in S$. Prin urmare, pentru fiecare submulţime $A \subseteq S$ vom utiliza A pentru a denota multisetul care corespunde mulţimii A, adică multisetul $\sum_{s \in A} 1`s$. În mod analog, pentru fiecare element $s \in S$ vom utiliza $s$ pentru a denota multisetul care corespunde mulţimii $\{s\}$, adică multisetul $1`s$.

Operaţiile cu multiseturi sunt definite ca şi operaţii cu funcţii, în felul următor:

i) adunare:

$$m_1 + m_2 = \sum_{s \in S} (m_1(s) + m_2(s))`s$$

ii) înmulţire cu scalar:

$$n * m = \sum_{s \in S} (n * m(s))`s$$

iii) comparaţii:

$$m_1 \neq m_2 \;\Leftrightarrow\; \exists\, s \in S : m_1(s) \neq m_2(s)$$

$$m_1 \leq m_2 \;\Leftrightarrow\; \forall\, s \in S : m_1(s) \leq m_2(s)$$

(relaţiile $\geq$ şi $=$ sunt definite analog cu $\leq$)

iv) dimensiunea unui multiset:

$$|m| = \sum_{s \in S} m(s)$$

Dacă $|m| = \infty$ atunci spunem că m este *infinit*. Altfel, m este *finit*.

v) scăderea, definită numai dacă $m_1 \geq m_2$:

$$m_1 - m_2 = \sum_{s \in S} (m_1(s) - m_2(s))`s$$

În sfîrşit, sumele peste multiseturi sunt definite precum este arătat în continuare.

Fie $m \in S_{MS}$ un multiset finit, $(R, +)$ un monoid comutativ şi $F : S \to R$ o funcţie. Vom utiliza notaţia

$$\sum_{s \in m} F(s)$$

pentru a denota *suma* care are cîte un termen pentru fiecare element al lui m. Cînd un element din S apare de mai multe ori în multisetul m, există cîte un termen pentru fiecare dintre aceste apariţii.

Ca un exemplu al acestei notaţii, fiecare multiset finit satisface relaţia

$$m = \sum_{s \in m} s\ .$$

Anexa B: Limbaje formale

Pentru noţiuni uzuale de teoria limbajelor formale există mai multe monografii standard ce pot fi consultate, cum ar fi [87], [30], [33], [78], printre care cea mai recentă, în româneşte, este [45]. În cele ce urmează ne vom rezuma doar la cîteva concepte şi notaţii de bază.

Fie A o mulţime nevidă numită *alfabet*. Elementele ei le vom numi *litere* sau *simboluri*.

Un *cuvânt de lungime n peste A*, $n \geq 1$, este orice funcţie

$$w : \{1, \ldots, n\} \to A.$$

Uzual, cuvântul w se notează ca o secvenţă

$$w(1) \cdots w(n).$$

Lungimea unui cuvânt w peste A va fi notată prin $|w|$.

Funcţia vidă $\lambda : \emptyset \to A$ va fi considerată *cuvânt de lungime* 0 *peste* A, numită adesea şi *cuvântul vid*.

Vom nota prin A^+ mulţimea tuturor cuvintelor de lungime cel puţin 1 peste A şi, prin A^*, mulţimea $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$.

Pe mulţimea A^* definim operaţia binară $\cdot$, numită *concatenarea cuvintelor*, astfel:

$$(u \cdot v)(i) = \begin{cases} u(i) & \text{, dacă } 1 \leq i \leq |u| \\ v(i - |u|) & \text{, dacă } |u| \leq i \leq |u| + |v| \end{cases},$$

pentru orice $u, v \in A^*$ şi $1 \leq i \leq |u| + |v|$ (adică, lungimea lui $u \cdot v$ este suma lungimilor celor două cuvinte, prima parte a cuvântului $u \cdot v$ fiind u, iar cea de-a doua, fiind v).

Semnul operaţiei de concatenare va fi omis cu precădere. Este uşor de văzut că $(A^*, \cdot)$ formează monoid (unitatea fiind λ).

Spunem că un cuvânt u este *subcuvânt* al cuvântului v dacă există cuvintele x şi y astfel încât $v = xuy$. Dacă $x = \lambda$, atunci u mai este numit şi *prefix* al lui v, iar dacă $y = \lambda$, atunci u mai este numit şi *sufix* al lui v.

Dacă $a \in A$ şi $w \in A^*$, atunci prin $\#(a, w)$ vom nota numărul de apariţii ale literei a în cuvântul w.

Un *limbaj* peste un alfabet A este orice submulţime $L \subseteq A^*$. Prin *familie de limbaje* vom înţelege orice colecţie (nu în mod necesar mulţime) de limbaje.

Printre operaţiile cu limbaje se numără toate operaţiile generale de la mulţimi (reuniune, intersecţie, diferenţă, produs cartezian, ş.a.). În plus, mai avem şi operaţia de produs. *Produsul* a două limbaje $L_1, L_2 \subseteq A^*$ este limbajul $L_1 \cdot L_2 \subseteq A^*$ definit prin $L_1 \cdot L_2 = \{u \cdot v \mid u \in L_1, v \in L_2\}$.

Limbajele pot fi generate prin *gramatici* (vezi [45]), pe baza cărora avem *ierarhia lui Chomsky* de familii de limbaje: $\mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_0$.

Anexa C: Arbori şi grafuri

Există mai multe monografii standard pentru noţiuni uzuale de teoria grafurilor, printre care amintim lucrarea [2], sau o lucrare mai recentă, în româneşte, [16]. În cele ce urmează ne vom rezuma doar la a prezenta câteva convenţii de terminologie şi notaţie asupra noţiunilor de arbore şi graf utilizate în această lucrare.

Un *graf orientat* este o pereche $G = (V, E)$, unde V este mulţimea nodurilor grafului şi $E \subseteq V \times V$ este mulţimea arcelor orientate ale grafului, satisfăcînd condiţia $V \cap E = \emptyset$. Un nod fără descendenţi (i.e. $v \in V$ astfel încât $E \cap (\{v\} \times V) = \emptyset$) este numit *nod frunză*. Noţiuni precum *drum* (orientat) şi *circuit* (orientat) într-un graf orientat, *subgraf (indus)* al unui graf orientat, *componentă tare conexă* şi *graful componentelor tare conexe* ale unui graf orientat, precum şi altele, pot fi găsite în monografiile amintite mai sus. O componentă tare conexă a unui graf orientat este numită *trivială* dacă este formată dintr-un singur nod al grafului respectiv.

Noţiunea de *arbore* pe care o vom folosi va fi cea de graf orientat (V, E) pentru care există un nod distinct $v_0 \in V$, numit *rădăcina* arborelui, astfel încât pentru orice nod $v \in V$ există un unic drum de la v_0 la v. Dacă v este nod al arborelui (V, E), atunci prin v^+ vom nota mulţimea descendenţilor direcţi ai lui v. Nodurile fără descendenţi sunt numite *frunze*. Dacă mulţimea descendenţilor direcţi ai oricărui nod al arborelui este finită, atunci spunem că arborele este *finit ramificat*.

Fie A şi B două mulţimi nevide. Prin *arbore* (A, B)*-etichetat* înţelegem orice 4-uplu $\mathcal{A} = (V, E, l_V, l_E)$, unde (V, E) formează un arbore, $l_V : V \to A$ este funcţia de etichetare a nodurilor şi $l_E : E \to B$ este funcţia de etichetare a arcelor.

Fie $\mathcal{A} = (V, E, l_V, l_E)$ un arbore (A, B)-etichetat. Prin $d_{\mathcal{A}}(v, v')$ notăm drumul (unic, dacă există) de la nodul v la nodul v', în arborele $\mathcal{A}$. Acest drum este gândit ca secvenţă de noduri (posibil vidă dacă nu există un astfel de drum). Scrierea $v'' \in d_{\mathcal{A}}(v, v')$ o vom folosi pentru a semnifica faptul că v'' este un nod pe drumul de la v la v'.

Fie $\mathcal{A} = (V, E, l_V, l_E)$ şi $\mathcal{A}' = (V', E', l'_V, l'_E)$ doi arbori (A, B)-etichetaţi. Spunem că $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{A}'$ sunt *izomorfi* dacă există o bijecţie $f : V \to V'$ care păstrează rădăcina, etichetele nodurilor şi arcele etichetate, adică avem că:

(i) $f(v_0) = v'_0$, v_0 şi v'_0 fiind rădăcinile celor doi arbori;

(ii) $l_V(v) = l'_V(f(v))$, pentru orice $v \in V$;

(iii) $(v_1, v_2) \in E \;\Leftrightarrow\; (f(v_1), f(v_2)) \in E'$, pentru orice $v_1, v_2 \in V$;

(iv) $l_E(v_1, v_2) = l'_E(f(v_1), f(v_2))$, pentru orice $(v_1, v_2) \in E$.

Fie L o mulţime nevidă. Prin *graf orientat etichetat (pe arce)* înţelegem orice 3-uplu $\mathcal{G} = (V, L, E)$, unde V este mulţimea nodurilor, L este mulţimea etichetelor (arcelor) şi E este mulţimea arcelor etichetate între noduri ($E \subseteq V \times L \times V$). De remarcat că pot exista mai multe arce între două noduri, dar oricare două asemenea arce distincte au etichete distincte.

Două grafuri orientate etichetate $\mathcal{G} = (V, L, E)$ şi $\mathcal{G}' = (V', L, E')$ (avînd aceeaşi mulţime de etichete) se numesc *izomorfe* dacă există o funcţie bijectivă $f : V \to V'$ care păstrează arcele etichetate, adică:

$$(v_1, l, v_2) \in E \;\Leftrightarrow\; (f(v_1), l, f(v_2)) \in E' \;,$$

pentru orice $v_1, v_2 \in V$, şi orice $l \in L$.

Anexa D: Modelare prin reţele cu inhibiţie

Reţelele Petri cu inhibiţie ([1, 28]) sunt o extensie a reţelelor clasice P/T, ce permite testul de zero al locaţiilor reţelei.

O *reţea Petri cu inhibiţie*, abreviat *IPTN*, este un cuplu $\gamma = (\Sigma, I)$, unde $\Sigma = (S, T, F, W)$ este o *PTN*, iar $I \subseteq S \times T$, cu $F \cap I = \emptyset$, este mulţimea *arcelor de inhibiţie* ale lui γ.

Prin urmare, ca structură, o reţea Petri cu inhibiţie este o reţea P/T clasică împreună cu o mulţime de arce cu semnificaţie specială.

Arcele de inhibiţie $(s, t) \in I$ mai sunt numite şi *teste de zero* ale reţelei γ. Mai precis, se spune că tranziţia t testează locaţia s pentru a vedea dacă este goală sau nu.

Fie $\gamma = (\Sigma, I)$ o *IPTN*. Reţeaua Σ ce apare în cuplul ce defineşte γ, este numită *reţeaua de bază* a lui γ. Prin *marcare* a reţelei γ se va înţelege orice marcare a reţelei de bază Σ. Noţiunea de reţea cu inhibiţie marcată este definită analog ca la P/T-reţele, schimbînd "Σ" cu "Σ, I".

Reprezentarea grafică a unei reţele cu inhibiţie va fi ca cea a unei reţele clasice, şi, în plus, arcele de inhibiţie I vor fi desenate drept linii punctate, în loc de săgeţi (vectori) ca în cazul arcelor normale F.

Pentru descrierea părţii dinamice (i.e., evoluţiei) a unei reţele cu inhibiţie, s-a definit o semantică asemănătoare cu cea de la reţele P/T, în care la fiecare pas al evoluţiei reţelei o tranziţie se poate produce numai dacă îndeplineşte suplimentar cerinţa ca locaţiile de care este conectată prin arce de inhibiţie să fie goale.

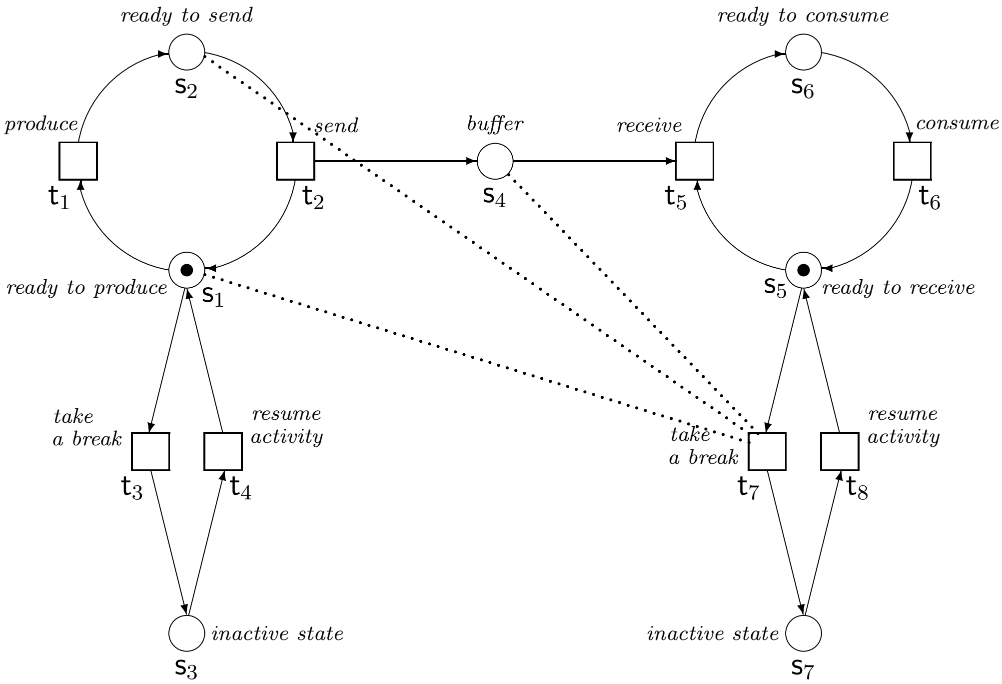
Şi anume, evoluţia secvenţială a reţelei cu inhibiţie $\gamma = (\Sigma, I)$ este dată de aşa-numita *regulă de i-tranziţie*, care constă în:

(RA) *regula de i-aplicabilitate*: o tranziţie t este *i-posibilă* la marcarea M în γ, abreviat $M[t\rangle_{\gamma,i}$, dacă şi numai dacă $M[t\rangle_\Sigma$ şi, în plus, $M(s) = 0$ pentru fiecare $s \in S$ cu $(s, t) \in I$.

(RC) *regula de i-calcul*: dacă $M[t\rangle_{\gamma,i}$, atunci marcarea M' *i-produsă* prin apariţia tranziţiei t la marcarea M, abreviat $M[t\rangle_{\gamma,i}M'$, este definită prin $M' = M + \Delta t$ (i.e., la fel ca pentru reţele clasice).

Noţiunile de *i-secvenţă de tranziţie* şi *marcare i-accesibilă* sunt definite similar ca cele pentru P/T-reţele. *Mulţimea de i-accesibilitate* a lui γ este notată prin $RS(\gamma)$ sau prin $[M_0\rangle_{\gamma,i}$ (M_0 fiind marcarea iniţială a lui γ).

Toate noţiunile de la reţele Petri P/T (i.e., marcare acoperibilă, locaţie mărginită, tranziţie pseudo-viabilă, tranziţie viabilă, limbajul generat, etc.) se definesc pentru reţele Petri cu inhibiţie analog ca pentru reţele P/T, prin considerarea noţiunii de *i-accesibilitate* în locul celei de *accesibilitate* de la



$$I = \{((\mathsf{s}_1, \mathsf{t}_7), (\mathsf{s}_2, \mathsf{t}_7), (\mathsf{s}_4, \mathsf{t}_7))\}$$

Figura 1: Sistem producător – consumator cu buffer nelimitat

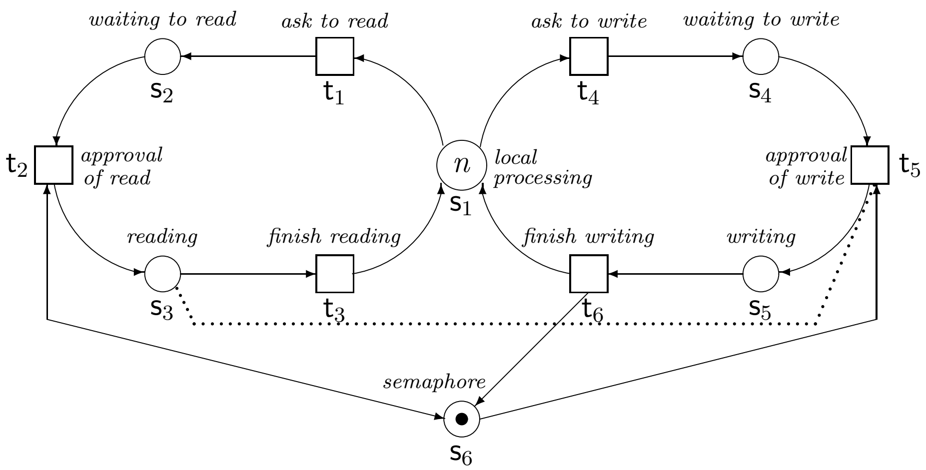
reţele P/T. La fel, structurile de acoperire şi tehnica invarianţilor se extind de la reţele P/T la reţele cu inhibiţie.

În lucrarea [117] am prezentat un model al sistemului expeditor – destinatar cu buffer nelimitat descris în subsecţiunea 4.3.1 din capitolul 4, model însoţit de verificarea proprietăţilor cu ajutorul tehnicii invarianţilor. Modelul constă în reţeaua Petri cu inhibiţie ilustrată în figura 1.

Se observă că în acest caz avem nevoie de trei arce de inhibiţie pentru a modela acest sistem, pe cînd pentru modelul realizat, folosind o reţea cu salturi, în subsecţiunea 4.3.1 din capitolul 4, a fost nevoie doar de un singur salt.

Iar în figura 2 este ilustrată o altă reţea Petri cu inhibiţie, ce modelează un alt sistem, cel al proceselor în citire concurentă/scriere exclusivă, ce a fost descris în subsecţiunea 4.3.2 din capitolul 4. Şi pentru acest model, pe care l-am prezentat la conferinţa ICCC 2004 ([122]), am realizat verificarea proprietăţilor sale cu ajutorul tehnicii invarianţilor.

Pentru acest sistem, se observă că uşurinţa de modelare a fost atinsă de data aceasta folosind arce de inhibiţie şi nu salturi, mai precis am avut nevoie



$$I = \{(\mathsf{s}_3, \mathsf{t}_5)\}$$

Figura 2: Procese în citire concurentă/scriere exclusivă

de un singur arc de inhibiţie, spre deosebire de modelul realizat, folosind o reţea cu salturi, în subsecţiunea 4.3.2 din capitolul 4, în cazul căruia a fost necesară folosirea unui număr infinit numărabil de salturi.

Anexa E: Marcări accesibile minimale şi rezultate conexe

După cum am văzut în subcapitolul 5.1, calculul gradului inferior de concurenţă a unei reţele P/T marcate γ se reduce la calculul unui minim definit pe mulţimea $minimal(RS(\gamma))$ formată din elementele minimale ale mulţimii de accesibilitate a reţelei γ. Mai mult, după cum am văzut, mulţimea $minimal(RS(\gamma))$ este întotdeauna finită, deşi mulţimea de accesibilitate $RS(\gamma)$ poate fi uneori infinită (mai precis, în cazul reţelelor nemărginite), fapt pe care l-am justificat pe baza lemei lui Dickson ([18]).

Se pune deci problema cum putem calcula mulţimea $minimal(RS(\gamma))$, chiar şi în cazul reţelelor nemărginite.

Propoziţia 1 *Pentru orice mPTN γ, mulţimea $minimal(RS(\gamma))$ este calculabilă.*

Acest rezultat l-am demonstrat în lucrarea [125], în care am arătat cum se poate aplica pentru această problemă a marcărilor accesibile, un algoritm mai general din [105].

Din păcate însă, procedura de decizie din [105] este prea ineficientă pentru a fi utilizată în practică, deoarece utilizează în mod intensiv algoritmul binecunoscut (dar foarte complex !) de decidabilitate a accesibilităţii pentru reţele P/T (observaţia 1.1.6).

O altă modalitate de a calcula mulţimea $minimal(RS(\gamma))$ se bazează pe un algoritm de calcul a părţilor coiniţiale ale mulţimii de accesibilitate, ce a fost descris în lucrarea [17]. Ideea expusă în [17] constă în următoarele.

Definiţia 1 *i) O mulţime de vectori $E \subseteq \mathbb{N}^S$ se numeşte* liniară *dacă există un vector $M \in \mathbb{N}^S$ (numit* baza *lui E) şi o mulţime finită $\{N_1, \ldots, N_n\} \subseteq \mathbb{N}^S$ de vectori (N_1,...,N_n sunt numiţi* perioadele *lui E), cu $n \geq 0$ (i.e. această mulţime poate fi şi vidă), astfel încât*

$$E = \{M' \in \mathbb{N}^S \,|\, M' = M + \sum_{1 \leq i \leq n} k_i \cdot N_i \text{ , } cu\ k_i \in \mathbb{N}\} .$$

ii) O mulţime se numeşte semi-liniară *dacă este o reuniune finită de mulţimi liniare.*

Definiţia 2 *Fie $(E, \leq)$ o mulţime parţial ordonată. O submulţime $F \subseteq E$ se numeşte* parte coiniţială a lui *E dacă şi numai dacă satisface proprietatea:*

$$\forall x \in E \ \exists y \in F : y \leq x .$$

Practic, se observă că $F \subseteq E$ este o parte coiniţială a lui E dacă şi numai dacă F conţine toate elementele minimale ale mulţimii E (relativ la relaţia de ordine parţială $\leq$), i.e. dacă şi numai dacă $minimal(E) \subseteq F$.

Propoziţia 2 ([17]) *Fiind date o reţea P/T marcată $\gamma = (\Sigma, M_0)$ şi o mulţime semi-liniară de marcări $E \subseteq \mathbb{N}^S$ arbitrare, se poate calcula o parte coiniţială finită a mulţimii $RS(\gamma) - E$.*

Algoritmul care calculează o parte coiniţială *finită* a mulţimii $RS(\gamma) - E$, precum şi demonstraţia corectitudinii lui, pot fi găsite în [17].

Să mai observăm faptul că, prin eliminarea din această parte coiniţială finită calculată de algoritmul din [17], a elementelor sale care sunt mai mari decît vreun alt element al acestei părţi, obţinem chiar elementele minimale ale mulţimii $RS(\gamma) - E$. Prin urmare, avem astfel un algoritm care calculează mulţimea $minimal(RS(\gamma) - E)$.

Alegînd în particular mulţimea $E = \emptyset$, obţinem astfel un al doilea algoritm care rezolvă problema enunţată în propoziţia 1.

Din nefericire însă, şi algoritmul din [17] este prea ineficient pentru a fi utilizat în practică, deoarece şi acesta utilizează în mod intensiv algoritmul binecunoscut (dar foarte complex) de decidabilitate a accesibilităţii pentru reţele P/T.

Rămîne aşadar o problemă deschisă, pentru cercetări viitoare, şi anume găsirea unui algoritm eficient de calcul a marcărilor accesibile minimale.

Ca un rezultat conex celor discutate mai sus, vom da în continuare o demonstraţie a unui rezultat ajutător amintit în subcapitolul 5.2, şi anume lema 5.2.1.

Să reamintim mai întîi enunţul acelei leme:

Lema 5.2.1 *Fie $\gamma = (\Sigma, M_0)$ o reţea P/T marcată, $T' \subseteq T$ un subset de tranziţii ale lui Σ, şi fie $\mathcal{M} \subseteq RS(\gamma)$ o mulţime finită. Atunci*

$$\min_{M \in RS(\gamma) - \mathcal{M}} d(\Sigma, T', M) \quad \text{şi} \quad \sup_{M \in RS(\gamma) - \mathcal{M}} d(\Sigma, T', M)$$

sunt calculabile.

Demonstraţie. Mulţimea de marcări accesibile $\mathcal{M}$ este semi-liniară, fiind finită, şi prin urmare îi putem aplica propoziţia 2 de mai sus. Ca atare, folosind algoritmul din [17] putem calcula mulţimea elementelor minimale ale mulţimii $RS(\gamma) - \mathcal{M}$, mulţime finită pe care o vom nota cu

$$\mathcal{M}' = minimal(RS(\gamma) - \mathcal{M})\,.$$

Ţinînd cont de acest fapt, şi folosind faptul că gradul de concurenţă la o marcare relativ la un subset de tranziţii este o funcţie monoton crescătoare în raport cu marcarea, i.e. $M_1 \leq M_2 \ \Rightarrow \ d(\Sigma, T', M_1) \leq d(\Sigma, T', M_2)$ (a se vedea observaţia 5.1.5), rezultă că

$$\min_{M \in RS(\gamma) - \mathcal{M}} d(\Sigma, T', M) \ = \ \min_{M \in \mathcal{M}'} d(\Sigma, T', M) \ .$$

Prin urmare, deoarece mulţimea $\mathcal{M}'$ este finită şi calculabilă, iar gradul de concurenţă $d(\gamma, T', M)$ este calculabil pentru orice marcare M (conform teoremei 5.1.1), din egalitatea anterioară rezultă că prima parte a propoziţiei 5.2.1 este demonstrată.

Pentru a doua parte, vom arăta cum se poate adapta demonstraţia teoremei 5.1.2, care ne arată cum se calculează supremul $\sup\limits_{M \in RS(\gamma)} d(\Sigma, T', M)$ folosind mulţimea minimală de acoperire a reţelei γ, i.e.

$$\sup_{M \in RS(\gamma)} d(\Sigma, T', M) \ = \ \max_{M \in MCS(\gamma)} d(\Sigma, T', M) \, ,$$

pentru a calcula un suprem definit pe mulţimea de accesibilitate exceptînd un număr finit de elemente ale ei, i.e. $\sup\limits_{M \in RS(\gamma) - \mathcal{M}} d(\Sigma, T', M)$.

Şi anume, mulţimea $\mathcal{M}$, a marcărilor accesibile care trebuie ignorate în calculul supremului dorit, fiind finită, putem presupune că este de forma

$$\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_k\} \text{ , cu } k \geq 1 \, .$$

Vom construi o mulţime finită $\mathcal{M}''$ în felul următor: mai întîi o iniţializăm cu $\mathcal{M}'' = MCS(\gamma)$, şi apoi vom extrage din ea, eventual, unele dintre marcările $M_1, \ldots, M_k$, în situaţiile descrise în continuare.

Pentru fiecare $1 \leq j \leq k$, deoarece $MCS(\gamma)$ este mulţime de acoperire pentru γ, rezultă că există o marcare $M'_j \in MCS(\gamma)$ astfel încât $M_j \leq M'_j$. Sunt posibile două situaţii:

1. $M'_j \notin \mathcal{M}$. Această situaţie este posibilă fie dacă $M'_j \notin RS(\gamma)$ (caz în care M'_j este limita unui şir infinit crescător de marcări accesibile), fie dacă $M'_j \in RS(\gamma) - \mathcal{M}$ (cazul în care M'_j este o marcare accesibilă ce nu trebuie ignorată). În ambele cazuri păstrăm marcarea M'_j în mulţimea $\mathcal{M}''$, deoarece trebuie luată în calcul pentru calcularea supremului dorit.

2. $M'_j \in \mathcal{M}$. În această situaţie M'_j este o marcare accesibilă ce trebuie ignorată în calculul supremului dorit, şi din acest motiv o vom elimina

din mulţimea $\mathcal{M}''$, dar în schimb va trebui să adăugăm la mulţimea $\mathcal{M}''$ toate acele marcări accesibile care nu sunt din mulţimea de ignorare $\mathcal{M}$ şi care sunt mai mici decît marcarea M'_j, i.e. marcările din mulţimea

$$\text{Adaugă}(M'_j) = \{M \in \mathbb{N}^S \mid M < M'_j\} \cap (RS(\gamma) - \mathcal{M})\,.$$

Aceste marcări sunt în număr finit, şi pot fi calculate în felul următor: mulţimea $\{M \in \mathbb{N}^S \mid M < M'_j\}$ este finită, fiind "regiunea" descrisă de punctul M'_j, fără acest punct, şi printr-o parcurgere exhaustivă a ei se pot selecta doar acele puncte care sunt marcări accesibile în γ şi nu fac parte din mulţimea de ignorare $\mathcal{M}$. Mai mult, este suficient să selectăm doar punctele maximale ce satisfac această proprietate, deci se poate optimiza metoda de parcurgere, pentru a nu mai parcurge punctele mai mici decît un punct deja selectat.

Deci în situaţia cînd $M'_j \in \mathcal{M}$ modificăm mulţimea $\mathcal{M}''$ astfel:

$$\mathcal{M}'' := \mathcal{M}'' - \{M'_j\} \cup \mathit{maximal}(\text{Adaugă}(M'_j))\,,$$

şi se observă că $\mathcal{M}''$ rămîne finită în urma acestei operaţii.

După ce iterăm acest raţionament pentru fiecare $1 \leq j \leq k$, mulţimea finită $\mathcal{M}''$ obţinută în final satisface proprietatea

$$\sup_{M \in RS(\gamma) - \mathcal{M}} d(\Sigma, T', M) \;=\; \max_{M \in \mathcal{M}''} d(\Sigma, T', M)\;\;,$$

şi prin urmare a doua parte a propoziţiei 5.2.1 este demonstrată. $\square$

Bibliografie

[1] T. Agerwala and M. Flynn. Comments on capabilities and limitations and correctness of Petri nets. In *Proc. of the* 1^{st} *Annual Symposium on Computer Architecture*, pages 81–86. New York, 1973.

[2] A. V. Aho, J. E. Hopcroft, and J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms.* Addison-Wesley, 1974.

[3] M. Ajmone Marsan. Stochastic Petri nets: An elementary introduction. In LNCS 424 [60], pages 1–29.

[4] T. Araki and T. Kasami. Some decision problems related to the reachability problem for Petri nets. *Theoretical Computer Science*, 3(1):85–104, 1977.

[5] F. Bause and P. Kritzinger. *Stochastic Petri Nets – An Introduction to the Theory (2nd edition).* Vieweg Verlag, Germany, 2002.

[6] E. Best and C. Fernández. Notations and terminology on Petri net theory. Arbeitspapiere der GMD 195, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1986. Also: Petri Net Newsletters No. 23 (April 1986), 21–46.

[7] H. D. Burkhard. The maximum firing strategy in Petri nets gives more power. ICS-PAS Report 441, Warszaw, 24-2, 26, 1980.

[8] H. D. Burkhard. On priorities of parallelism: Petri nets under the maximum firing strategy. In *Proc. of the International Conference LOGLAN 77.* Poznan, Poland, 1980.

[9] H. D. Burkhard. Ordered firing in Petri nets. *Journal of Information Processing and Cybernetics EIK*, 17:71–86, 1981.

[10] H. D. Burkhard. Two pumping lemmata for Petri nets. *Journal of Information Processing and Cybernetics EIK*, 17(7):349–362, 1981.

[11] H. D. Burkhard. Control of Petri nets by finite automata. Preprint 26, Sektion Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, 1982.

[12] H. D. Burkhard. What gives Petri nets more computational power. Preprint 45, Sektion Mathematik, Humboldt-Universität zu Berlin, 1982.

[13] G. Chiola, C. Dutheillet, G. Franceschinis, and S. Haddad. On well-formed coloured Petri nets and their symbolic reachability graph. In *High-level Petri Nets. Theory and Application*, pages 373–396. Springer-Verlag, 1991.

[14] S. Christensen and L. Petrucci. Modular analysis of Petri nets. *The Computer Journal*, 43(3):224–242, 2000.

[15] S. Crespi-Reghizzi and D. Mandrioli. Petri nets and Szilard languages. *Inform. Contr.*, 33:177–192, 1977.

[16] C. Croitoru. *Tehnici de bază în Optimizarea Combinatorie*. Editura Universităţii "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi, 1992.

[17] D. de Frutos Escrig and C. Johnen. Decidability of home space property. Technical report, Univ. de Paris-Sud, Centre d'Orsay, Laboratoire de Recherche en Informatique Report LRI–503, July 1989.

[18] L. E. Dickson. Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors. *American Journal of Mathematics*, 35:413–422, 1913.

[19] C. Fernández. Non-sequential processes. In LNCS 254 [59], pages 95–115.

[20] A. Finkel. Structuration des systemes de transitions. Applications au controle du parallelisme par files FIFO. These d'etat, Universite de Paris-Sud, 1986.

[21] A. Finkel. A minimal coverability graph for Petri nets. In *Proc. of the* 11^{th} *International Conference on Application and Theory of Petri Nets*. Paris, France, 1991.

[22] A. Finkel. The minimal coverability graph for Petri nets. In LNCS 674 [62], pages 210–243.

[23] H. J. Genrich. Predicate/Transition nets. In LNCS 254 [59], pages 207–247.

[24] H. J. Genrich. Equivalence transformations of Pr/T-nets. In LNCS 424 [60], pages 179–208.

[25] H. J. Genrich and K. Lautenbach. System modelling with high-level Petri nets. *Theoretical Computer Science*, 13:109–136, 1981.

[26] H. J. Genrich, K. Lautenbach, and P. S. Thiagarajan. Elements of general net theory. In LNCS 84 [63], pages 23–163.

[27] C. Girault and R. Valk. *Petri Nets for Systems Engineering: A Guide to Modeling, Verification, and Applications.* Springer-Verlag, 2002.

[28] M. Hack. Petri net languages. Comp. Struct. Group Memo 124, Project MAC, M.I.T. Press, 1975.

[29] S. Haddad. A reduction theory for coloured nets. In LNCS 424 [60], pages 209–235.

[30] M. Harrison. *Introduction to Formal Language Theory.* Addison-Wesley, 1978.

[31] A. Holt. Introduction to occurrence systems. *Associative Information Techniques*, pages 175–203, 1971.

[32] A. Holt, H. Saint, R. M. Shapiro, and S. Warshall. Final report of the information systems theory project. Technical report RADC-TR-68-305, 1968.

[33] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman. *Introduction to Automate Theory, Languages, and Computation.* Addison-Wesley, 1979.

[34] P. Huber, A. M. Jensen, L. O. Jepsen, and K. Jensen. Reachability trees for high-level Petri nets. *Theoretical Computer Science*, 45(3):261–292, 1986.

[35] P. Huber, K. Jensen, and R. M. Shapiro. Hierarchies in coloured Petri nets. In LNCS 483 [61], pages 313–341.

[36] M. Jantzen. On the hierarchy of Petri net languages. *R.A.I.R.O. Informatique Théorique*, 13:19–30, 1979.

[37] M. Jantzen. Complexity of Place/Transition nets. In LNCS 254 [59], pages 413–434.

[38] M. Jantzen. Language theory of Petri nets. In LNCS 254 [59], pages 397–412.

[39] M. Jantzen and R. Valk. Formal properties of Place/Transition nets. In LNCS 84 [63], pages 165–212.

[40] K. Jensen. Coloured Petri nets and the invariant-method. *Theoretical Computer Science*, 14:317–336, 1981.

[41] K. Jensen. Coloured Petri nets. In LNCS 254 [59], pages 248–299.

[42] K. Jensen. *Coloured Petri Nets. Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use. Volume 1.* EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, 1992.

[43] K. Jensen. *Coloured Petri Nets. Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use. Volume 2.* EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, 1995.

[44] K. Jensen. *Coloured Petri Nets. Basic Concepts, Analysis Methods and Practical Use. Volume 3.* EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, 1997.

[45] T. Jucan. *Limbaje formale şi automate.* Editura MatrixRom, Bucureşti, 1999.

[46] T. Jucan, C. Masalagiu, and F. L. Ţiplea. Relation based controlled Petri nets. *Scientific Annals of the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Computer Science Section*, Tome II:27–35, 1993.

[47] T. Jucan and F. L. Ţiplea. *Reţele Petri.* Editura Universităţii "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi, 1995.

[48] T. Jucan and F. L. Ţiplea. *Reţele Petri. Teorie şi practică.* Editura Academiei Române, Bucureşti, 1999.

[49] T. Jucan and C. Vidraşcu. Concurrency-degrees for Petri nets. *Studia Universitatis Babeş-Bolyai, Computer Science Section*, XLIV(2):3–15, 1999.

[50] T. Jucan and C. Vidraşcu. Concurrency-degrees for Petri nets. In L. D. Şerbănaţi et al., editors, *Volumul Primei Conferinţe de Informatică Teoretică şi Tehnologii Informatice – CITTI 2000*, pages 108–114. Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea "Ovidius" din Constanţa, 25–27 mai, 2000.

[51] R. M. Karp and R. E. Miller. Parallel program schemata. *Journal of Computer and System Sciences*, 3(3):147–195, 1969.

[52] T. Kasai and R. E. Miller. Homomorphisms between models of parallel computation. *Journal of Computer and System Sciences*, 25:285–331, 1982.

[53] D. König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1936.

[54] S. R. Kosaraju. Decidability of reachability in vector addition systems. In *Proc. of the* 14^{th} *Annual ACM STOC*, pages 267–281, 1982.

[55] K. Lautenbach. Liveness in Petri nets. GMD-ISF Internal Report 02.1/75-7-29, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1975.

[56] K. Lautenbach. Linear algebraic techniques for Place/Transition nets. In LNCS 254 [59], pages 142–167.

[57] M. Lindqvist. Parameterized reachability trees for Predicate/Transition nets. In LNCS 674 [62], pages 301–324.

[58] *Lectures on Petri Nets, Part I: Basic Models. Advances in Petri Nets 1998, Part I*, volume 1491 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1998.

[59] *Petri Nets: Central Models and Their Properties. Advances in Petri Nets 1986, Part I*, volume 254 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1987.

[60] *Advances in Petri Nets 1989*, volume 424 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1990.

[61] *Advances in Petri Nets 1990*, volume 483 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1991.

[62] *Advances in Petri Nets 1993*, volume 674 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1993.

[63] *Net Theory and Applications*, volume 84 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer-Verlag, 1980.

[64] I. A. Lomazova. Nested Petri nets – a formalism for specification and verification of multi-agent distributed systems. *Fundamenta Informaticae*, 43:195–214, 2000.

[65] I. A. Lomazova and P. Schnoebelen. Some decidability results for nested Petri nets. In *Proc. Andrei Ershov* 3^{rd} *International Conference Perspectives of System Informatics (PSI'99), Novosibirsk, Russia, July 1999*, volume 1755 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 208–220. Springer-Verlag, 1999.

[66] E. W. Mayr. An algorithm for the general Petri net reachability problem. In *Proc. of the* 13^{rd} *Annual ACM STOC*, pages 238–246, 1981.

[67] E. W. Mayr. An algorithm for the general Petri net reachability problem. *SIAM Journal of Computing*, 13(3):441–460, 1984.

[68] G. Memmi and J. Vautherin. Analysing nets by the invariant method. In LNCS 254 [59], pages 300–337.

[69] R. E. Miller. A comparison of some theoretical models of parallel computation. *IEEE Transactions on Computing*, C-22:710–717, 1973.

[70] A. Pagnoni. Stochastic nets and performance evaluation. In LNCS 254 [59], pages 460–478.

[71] J. L. Peterson. Computation sequence sets. *Journal of Computer and System Sciences*, 13(1):1–24, Aug. 1976.

[72] J. L. Peterson. *Petri Net Theory and the Modelling of Systems*. Prentice-Hall, 1981.

[73] J. L. Peterson and T. H. Bredt. A comparison of models of parallel computation. In *Proc. of IFIP Congress 74*, pages 466–470, Amsterdam, 1974. North-Holland Publ. Comp.

[74] C. A. Petri. Kommunication mit automaten. Schriften des IIM 2, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn (Germany), 1962.

[75] C. A. Petri. Interpretations of net theory. GMD-ISF Internal Report 75-7, Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung, 1976.

[76] C. A. Petri. Introduction to general net theory. In *Proc. of the Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems*. Hamburg (Germany), 1979.

[77] L. Petrucci. Combining Finkel's and Jensen's reduction techniques to build covering trees for coloured Petri nets. *Petri Net Newsletter*, 36:32–36, Aug. 1990. Special Interest Group on Petri Nets and Related System Models, Gesellschaft für Informatik (GI), Germany.

[78] G. Păun. *Probleme actuale în teoria limbajelor formale.* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1984.

[79] C. Ramchandani. Analisys of asynchronous concurrent systems by Petri nets. Tehnical Report 120, Project MAC, M.I.T. Cambridge, Massachusetts, 1974.

[80] W. Reisig. *Petri Nets. An Introduction.* EATCS Monographs on Theoretical Computer Science. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[81] W. Reisig. Petri nets with individual tokens. *Theoretical Computer Science*, 41:185–213, 1985.

[82] W. Reisig. Petri nets in software engineering. In *Petri Nets: Applications and Relationships to Other Models of Concurrency. Advances in Petri Nets 1986, Part II*, volume 255 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 63–96. Springer-Verlag, 1987.

[83] W. Reisig. Place/Transition systems. In LNCS 254 [59], pages 117–141.

[84] W. Reisig. *A Primer in Petri Net Design.* Springer-Verlag, 1992.

[85] C. Reutenauer. *The Mathematics of Petri Nets.* Prentice Hall International (UK) Ltd., 1990.

[86] G. Rozenberg. Behaviour of elementary net systems. In LNCS 254 [59], pages 60–94.

[87] A. Salomaa. *Formal Language Theory.* Academic Press, 1973.

[88] J. Skifakis. Performance evaluation of systems using nets. In LNCS 84 [63], pages 307–319.

[89] P. S. Thiagarajan. Elementary net systems. In LNCS 254 [59], pages 26–59.

[90] F. L. Ţiplea. Selective Petri net languages. *International Journal of Computer Mathematics*, 43(1-2):61–80, 1992.

[91] F. L. Ţiplea. Contribuţii la teoria limbajelor reţea Petri. Teză de doctorat, Universitatea "Alexandru Ioan Cuza" din Iaşi, 1993.

[92] F. L. Ţiplea. Petri net languages. In *Proc. of the* 19^{th} *Symposium on Semigroups, Languages and their Related Fields*, pages 71–86. Shimane, Japan, 1995.

[93] F. L. Ţiplea. On computational power of jumping Petri nets. In *Proc. of the Workshop on Semigroups, Formal Languages and Computer Systems*, pages 165–177. RIMS Kokyuroku 960, Kyoto, Japan, 1996.

[94] F. L. Ţiplea. *Introducere în Teoria Mulţimilor.* Editura Universităţii "Alexandru Ioan Cuza", Iaşi, 1998.

[95] F. L. Ţiplea and T. Jucan. Jumping Petri nets. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 19(4):319–332, 1994.

[96] F. L. Ţiplea and T. Jucan. Complexity of Petri nets. In *Proc. of the* 10^{th} *Romanian Symposium on Computer Science – ROSYCS'96*, pages 1–26. Faculty of Computer Science, "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Romania, 1996.

[97] F. L. Ţiplea and T. Jucan. Petri net languages. In *Proc. of the* 10^{th} *Romanian Symposium on Computer Science – ROSYCS'96*, pages 71–96. Faculty of Computer Science, "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Romania, 1996.

[98] F. L. Ţiplea, T. Jucan, and Şt. Dumbravă. Modeling systems by Petri nets with different degrees of concurrency. In *Proc. of the* 4^{th} *International Symposium on Automatic Control and Computer Science – SACCS'93*, pages 48–54. Faculty of Automatic Control and Computer Engineering, "Gh. Asachi" Technical Univesity of Iaşi, Romania, 1993.

[99] F. L. Ţiplea, T. Jucan, and C. Masalagiu. Conditional Petri net languages. *Journal of Information Processing and Cybernetics EIK*, 27(1):55–66, 1991.

[100] F. L. Ţiplea and E. Mäkinen. Jumping Petri nets. Specific properties. *Fundamenta Informaticae*, 32:373–392, 1997.

[101] R. Valk. On the computational power of extended Petri nets. In *Proc. of the* 7^{th} *Symposium "Mathematical Foundations of Computer Science"*, volume 64 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 526–535. Springer-Verlag, 1978.

[102] R. Valk. Self-modifying nets, a natural extension of Petri nets. In *Proc. of the* 5^{th} *Colloquium "Automata, Languages and Programming"*, volume 62 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 464–476. Springer-Verlag, 1978.

[103] R. Valk. Petri nets as dynamical objects. In *Proc. 16th International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Torino, Italy*, 1995.

[104] R. Valk. Petri nets as token objects: An introduction to elementary object nets. In *Proc. 19th International Conference on Application and Theory of Petri Nets, ICATPN'98, Lisbon, Portugal, June 1998*, volume 1420 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–25. Springer-Verlag, 1998.

[105] R. Valk and M. Jantzen. The residue of vector sets with applications to decidability problems in Petri nets. *Acta Informatica*, 21:643–674, 1985.

[106] R. Valk and G. Vidal-Naquet. Petri nets and regular languages. *Journal of Computer and System Sciences*, 23(3):299–325, 1981.

[107] A. Valmari. Stubborn sets for coloured Petri nets. In *Proc. of the 12th International Conference on Application and Theory of Petri Nets*, pages 102–121. Aarhus, Denmark, 1991.

[108] A. Valmari. Stubborn sets for reduced state space generation. In LNCS 483 [61], pages 491–515.

[109] C. Vidraşcu. An application of the minimal coverability graph. *Scientific Annals of the North University of Baia Mare, B Series, Mathematics and Computer Science Section*, XVI(1):159–170, 2000. Proc. of the 2nd International Conference on Applied Mathematics – ICAM 2, Baia Mare, Romania, October 19–21, 2000.

[110] C. Vidraşcu. On dynamic properties of Petri nets. In F. Cassez, C. Jard, B. Rozoy, and M. Ryan, editors, *Proc. of the summer school Modelling and Verification of Parallel Processes – MOVEP'2000*, pages 239–243. IRCCyN, École Centrale de Nantes, Nantes, France, June 19–23, 2000.

[111] C. Vidraşcu. S-invariants for Δ-finite jumping Petri nets. In C. Lazăr, editor, *The 7th International Symposium on Automatic Control and Computer Science – SACCS 2001, Abstracts Book + CD-ROM Proceedings*. Faculty of Automatic Control and Computer Engineering, "Gh. Asachi" Technical Univesity of Iaşi, Romania, Oct. 26–27, 2001.

[112] C. Vidraşcu. Some applications of the minimal coverability structures. *Scientific Annals of the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Computer Science Section*, Tome X:55–77, 2001.

[113] C. Vidraşcu. T-invariants for jumping Petri nets. *Computer Science Journal of Moldova*, 9(3):350–368, 2001. Proc. of the 1^{st} Conference of the Mathematical Society of Moldova, Chişinău, Republic of Moldova, August 15–18, 2001.

[114] C. Vidraşcu. On the invariant method for Petri nets. In F. Cassez, C. Jard, F. Laroussinie, and M. Ryan, editors, *Proc. of the summer school Modelling and Verification of Parallel Processes – MOVEP'2002*, pages 423–428. IRCCyN, École Centrale de Nantes, Nantes, France, June 17–21, 2002.

[115] C. Vidraşcu. Concurrency in Petri nets. In *Volumul Simpozionului Internaţional al Tinerilor Cercetători - Ediţia I*, pages 363–364. Academia de Studii Economice din Moldova, Chişinău, Republica Moldova, Apr. 18–19, 2003.

[116] C. Vidraşcu. The invariant method for jumping Petri nets. In D. Grigoraş, A. Nicolau, and F. L. Ţiplea, editors, *Pre-proc. of the NATO Advanced Research Workshop on Concurrent Information Processing and Computing – CIPC2003*, pages 239–253. Sinaia, Romania, July 5–10, 2003.

[117] C. Vidraşcu. Modelling a producer-consumer system. In T. Maghiar, A. Georgescu, M. Balaj, I. Dziţac, and I. Mang, editors, *Proc. of the 11^{th} Conference on Applied and Industrial Mathematics – CAIM 2003*, volume 1, pages 232–236. The University of Oradea and Romanian Society of Applied and Industrial Mathematics (ROMAI), Romania, May 29–31, 2003.

[118] C. Vidraşcu. Modelling a sender-receiver system. *Acta Cybernetica*, 16(1):147–154, Jan. 2003.

[119] C. Vidraşcu. Structuri de accesibilitate reduse pentru reţele Petri de nivel înalt. Technical report TR 03–06, Faculty of Computer Science, the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Dec. 2003.

[120] C. Vidraşcu. Concurrency in high-level Petri nets. In *The 8^{th} International Symposium on Automatic Control and Computer Science – SACCS 2004, Abstracts Book + CD-ROM Proceedings*. Faculty of Automatic Control and Computer Engineering, "Gh. Asachi" Technical Univesity of Iaşi, Romania, Oct. 22–23, 2004.

[121] C. Vidraşcu. Invariants and verification of properties for jumping Petri nets. Technical report TR 04–02, Faculty of Computer Science, the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Oct. 2004.

[122] C. Vidraşcu. Modelling a CREW processes system. In *Proc. of the International Conference on Computers and Communications – ICCC 2004*, pages 421–425. The University of Oradea, Romania, May 27–29, 2004.

[123] C. Vidraşcu. Modelling and verification with Petri nets. In *Volumul Simpozionului Internaţional al Tinerilor Cercetători - Ediţia a II-a*, pages 32–34. Academia de Studii Economice din Moldova, Chişinău, Republica Moldova, Apr. 29–30, 2004.

[124] C. Vidraşcu. Modelling and verification with jumping Petri nets. *Scientific Annals of the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Computer Science Section*, Tome XIV, 2004 (*to appear*).

[125] C. Vidraşcu. A note on the reachability set of Petri nets. In *Proc. of the* 12^{th} *Conference on Applied and Industrial Mathematics – CAIM 2004*. The University of Piteşti and Romanian Society of Applied and Industrial Mathematics (ROMAI), Romania, Oct. 15–17, 2004 (*to appear*).

[126] C. Vidraşcu and T. Jucan. On coverability structures for jumping Petri nets. *Scientific Annals of the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Computer Science Section*, Tome IX:1–26, 2000.

[127] C. Vidraşcu and T. Jucan. On concurrency-degrees for Petri nets. Technical report TR 01–01, Faculty of Computer Science, the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Feb. 2001.

[128] C. Vidraşcu and T. Jucan. On coverability structures for jumping Petri nets. Technical report FBI–HH–B–232, Fachbereich Informatik, Universitat Hamburg, Germany, 2001.

[129] C. Vidraşcu and T. Jucan. Concurrency-degrees for jumping Petri nets. *Scientific Annals of the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Computer Science Section*, Tome XII:135–151, 2002.

[130] C. Vidraşcu and T. Jucan. On concurrency-degrees for jumping Petri nets. *Scientific Annals of the North University of Baia Mare, B Series, Mathematics and Computer Science Section*, XVIII(2):373–382, 2002.

Proc. of the 3^{rd} International Conference on Applied Mathematics – ICAM 3, Baia Mare – Borşa, Romania, October 10–13, 2002.

[131] C. Vidraşcu and T. Jucan. Concurrency-degrees for P/T-nets. *Scientific Annals of the "Alexandru Ioan Cuza" University of Iaşi, Computer Science Section*, Tome XIII:91–103, 2003.

[132] J. Wang. *Timed Petri Nets. Theory and Application.* Kluwer Academic Publishers, 1998.

[133] W. M. Zuberek. Timed Petri nets and preliminary performance evaluation. In *Proc. of the* 7^{th} *Annual Symposium on Computer Architecture*, pages 88–96, 1980.

[134] *** - Design/CPN tool: **http://www.daimi.au.dk/DesignCPN/**. Website maintained at DAIMI, University of Aarhus, Denmark.

[135] *** - Petri Nets portal: **http://www.daimi.au.dk/PetriNets/**. Website maintained at DAIMI, University of Aarhus, Denmark.

[136] *** - RENEW simulator: **http://www.renew.de/**. Website maintained at Fachbereich Informatik, University of Hamburg, Germany.